112 學年度學科能力測驗數學 A 考科
非選擇題滿分參考答案與評分原則

數學 A 的題型有選擇（填）與混合題或非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考，詳細評分原則說明與部分學生作答情形，請參閱本中心將於 4 月 17 日出刊的第 336 期《選才電子報》。112 學年度學科能力測驗數學 A 考科非選擇題各題的參考答案說明如下：

第 19 題

一、滿分參考答案：

【法一】

由 $\overline{AP}=\overline{OA}=1$ 以及 $\angle AOP=\theta$ 得 $\angle APO=\theta$，因此 $\angle OAP=\pi-2\theta$。

另一方面由 $\overline{BQ}=\overline{OB}$ 以及 $\angle POQ=\dfrac{\pi}{2}$ 得 $\angle QOB=\angle OQB=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，因此 $\angle OBQ=2\theta$。

由 $\angle OAP+\angle OBQ=\pi$，得證 $\overrightarrow{AP}$ 與 $\overrightarrow{BQ}$ 平行且同向。再加上 $\overline{BQ}=2=2\overline{AP}$，

得證 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$。

又因 $\overrightarrow{BQ}$ 和 x 軸正向夾角為 2θ，以及 $\overline{BQ}=2$ 得 $\overrightarrow{BQ}=2(\cos 2\theta,\sin 2\theta)=(\dfrac{14}{25},\dfrac{48}{25})$。

因 B 點坐標為 $(-2,0)$，得 Q 點坐標為 $(-2,0)+(\dfrac{14}{25},\dfrac{48}{25})=(\dfrac{-36}{25},\dfrac{48}{25})$。

【法二】

由題設 $\angle AOP=\theta$ 且 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，得直線 $\overline{OP}$ 斜率為 $\dfrac{3}{4}$。設 P 點坐標為 $(4t,3t)$，

由 $\overline{AP}^2=(4t-1)^2+(3t)^2=1$ 解得 $t=\dfrac{8}{25}$，故 P 點坐標為 $(\dfrac{32}{25},\dfrac{24}{25})$。

又依題設 $\angle POQ=\dfrac{\pi}{2}$，知直線 $\overline{OQ}$ 斜率為 $\dfrac{-4}{3}$。設 Q 點坐標為 $(-3t,4t)$，

由 $\overline{BQ}^2=(3t-2)^2+(4t)^2=4$ 解得 $t=\dfrac{12}{25}$，故 Q 點坐標為 $(\dfrac{-36}{25},\dfrac{48}{25})$。

根據上述，因為 $\overrightarrow{BQ}=(\dfrac{-36}{25},\dfrac{48}{25})-(-2,0)=(\dfrac{14}{25},\dfrac{48}{25})$，$\overrightarrow{AP}=(\dfrac{32}{25},\dfrac{24}{25})-(1,0)=(\dfrac{7}{25},\dfrac{24}{25})$，

得證 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$。

【法三】

因 ΔPOA 為腰長為 1 底角為 θ 的等腰三角形，故 $\overline{OP}=2\cos\theta=\frac{8}{5}$。因此得點 P 極坐標為 $[\frac{8}{5},\theta]$，即點 P 坐標為 $\frac{8}{5}(\frac{4}{5},\frac{3}{5})=(\frac{32}{25},\frac{24}{25})$。又依題設 $\angle POQ=\frac{\pi}{2}$，知 ΔQOB 為腰長為 2 底角為 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 的等腰三角形，故 $\overline{OQ}=2\times2\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{12}{5}$。因此得點 Q 極坐標為 $[\frac{12}{5},\frac{\pi}{2}+\theta]$，

即點 Q 坐標為 $\frac{12}{5}(\frac{-3}{5},\frac{4}{5})=(\frac{-36}{25},\frac{48}{25})$。

根據上述，因為 $\overrightarrow{BQ}=(\frac{-36}{25},\frac{48}{25})-(-2,0)=(\frac{14}{25},\frac{48}{25})$，$\overrightarrow{AP}=(\frac{32}{25},\frac{24}{25})-(1,0)=(\frac{7}{25},\frac{24}{25})$，

得證 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$。

二、評分原則：

1.根據題意所給條件，正確推論 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$，且理由須正確。

2.正確解出 Q 點坐標為 $(\frac{-36}{25},\frac{48}{25})$，且過程正確。

第 20 題

一、滿分參考答案：

【法一】

由 $\angle OBQ=2\theta$ 得 A 點到 $\overline{BQ}$ 的距離為 $\overline{AB}\sin2\theta=3\times\frac{24}{25}=\frac{72}{25}$。

因四邊形 $PABQ$ 為兩底分別為 $\overline{AP}=1,\overline{BQ}=2$ 的梯形，故得面積為 $\frac{3}{2}\times\frac{72}{25}=\frac{108}{25}$。

【法二】

直線 $\overline{BQ}$ 的斜率為 $\tan2\theta=\frac{24}{7}$ 且通過 $B(-2,0)$，故方程式為 $y=\frac{24}{7}(x+2)$，

因此點 $A(1,0)$ 到 $\overline{BQ}$ 的距離為 $\dfrac{3\times\frac{24}{7}}{\sqrt{1^2+(\frac{24}{7})^2}}=\frac{72}{25}$。

因四邊形 $PABQ$ 為兩底分別為 $\overline{AP}=1, \overline{BQ}=2$ 的梯形，故得面積為 $\frac{3}{2}\times\frac{72}{25}=\frac{108}{25}$。

【法三】

點 Q 的 y 坐標為 $\frac{48}{25}$，故三角形 AQB 面積為 $\frac{1}{2}\times3\times\frac{48}{25}=\frac{72}{25}$。

又 $\overline{BQ}=2$，故 A 點到 $\overline{BQ}$ 的距離 h 滿足 $\frac{1}{2}\times2\times h=\frac{72}{25}$，得 $h=\frac{72}{25}$。

因四邊形 $PABQ$ 為兩底分別為 $\overline{AP}=1, \overline{BQ}=2$ 的梯形，故得面積為 $\frac{3}{2}\times\frac{72}{25}=\frac{108}{25}$。

【法四】

ΔBOQ 底為 2 高為 $\frac{48}{25}$（或底為 $\frac{12}{5}$ 高為 $\frac{8}{5}$），故面積為 $\frac{48}{25}$。

ΔPOQ 為兩股分別為 $\frac{12}{5}$、$\frac{8}{5}$ 的直角三角形，故面積為 $\frac{48}{25}$。

ΔAOP 底為 1 高為 $\frac{24}{25}$（或底為 $\frac{8}{5}$ 高為 $\frac{3}{5}$），故面積為 $\frac{12}{25}$。

因此四邊形 $PABQ$ 的面積為 $\Delta BOQ+\Delta QOP+\Delta POA=\frac{48}{25}+\frac{48}{25}+\frac{12}{25}=\frac{108}{25}$。

四邊形 $PABQ$ 為兩底分別為 $\overline{AP}=1, \overline{BQ}=2$ 的梯形，

故 A 點到 $\overline{BQ}$ 的距離 h 滿足 $\frac{3}{2}\times h=\frac{108}{25}$，得 $h=\frac{72}{25}$。

二、評分原則：

1.正確寫出點 A 到直線 BQ 的距離為 $\frac{72}{25}$，且過程正確。

2.正確寫出四邊形的面積為 $\frac{108}{25}$，且過程正確。