

112 學年度分科測驗 數學甲考科非選擇題評分原則

數學甲考科的題型有選擇、選填與混合題(含非選擇題)、非選擇題。112 學年度分科測驗數學甲考科的非選擇題共有 5 題，包含第 12、13、14、16、17 題。其中第 12 題為 2 分；第 13 題為 4 分、第 14 題為 6 分、第 16 題為 4 分；第 17 題為 6 分，總計 22 分。

非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。例如最後求解答案時，因計算錯誤，未得到正確答案；或能運用推理能力解決問題，但未能完整檢驗結果的合理性與正確性。若答題時未於解題過程中清楚表達如何依據題設進行推論，則無法得到分數，例如只有答案，沒有解題過程；或解題觀念錯誤；或一開始用不符合題設的數據作答。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。112 學年度分科測驗數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第 12 題

一、滿分參考答案：

根據題意，將 $P(1, \frac{1}{2})$ 代入 $x^2 + y^2 - 3y + b = 0$ ，推得 $b = \frac{1}{4}$ 。

再利用 $x^2 + y^2 - 3y + \frac{1}{4} = 0$ 配方得 $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 2$ ，故圓心 C 點坐標為 $(0, \frac{3}{2})$ 、

$$\vec{CO} = \left(0, -\frac{3}{2}\right), \vec{CP} = (1, -1),$$

所以 \vec{CO} 與 \vec{CP} 夾角的餘弦值為 $\frac{\left(0, -\frac{3}{2}\right) \cdot (1, -1)}{\frac{3}{2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

二、評分原則：

正確計算得出題意所求為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

第 13 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

$y=f(x)$ 圖形在點 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線斜率為 $\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \right|_{x=1} = 1$ ，直線 CP 斜率為 $\frac{\frac{1}{2}-3}{1-0} = -1$ ，

直線 CP 與 Ω 過點 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線垂直，所以 Ω 過點 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線斜率為 $\frac{-1}{-1} = 1$ ，

兩切線都過 P 點且斜率相等，所以 $y=f(x)$ 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。

【解法二】

$y=f(x)$ 圖形在點 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線斜率為 $\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \right|_{x=1} = 1$ ， $y=f(x)$ 圖形在點 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切

線方程式為 $y=x-\frac{1}{2}$ 。圓心 C 到直線 $y=x-\frac{1}{2}$ 的距離為 $\frac{\left| 0-\frac{3}{2}-\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$ ，等於半

徑，所以 $y=f(x)$ 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。

二、評分原則：

(1) 正確計算得到 $y=f(x)$ 圖形與 Ω 在 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線斜率為 1，或寫出正確的切線

方程式 $y=x-\frac{1}{2}$ ，且有正確的解題過程。

(2) 正確證明 $y=f(x)$ 圖形或 Ω 其中一個在 $P(1, \frac{1}{2})$ 的切線也是另一個圖形的切線，

且有正確的推論過程與理由。

第 14 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

$y=f(x)$ 圖形對 y 軸對稱，圓 Ω 的圖形也對 y 軸對稱，先求在右半平面的面積：

x 軸、 y 軸、 $x=1$ 以及線段 \overline{CP} 所圍梯形面積為 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) \times 1 = 1$ ，減去正 y 軸、線段

\overline{CP} 與圓 Ω (半徑為 $\sqrt{2}$) 所圍扇形面積為 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2}^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ ，再減去 Γ 與 x 軸以及 $x=1$

所圍區域面積 $\int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{6}$ ，

得右半平面的面積為 $1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}$ ，故題意所求面積為 $2 \times \left(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$ 。

【解法二】

$$\int_{-1}^1 \left[\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2-x^2} \right) - \frac{1}{2}x^2 \right] dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx - \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{6}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3}$$

$\int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx$ 為圓 Ω 的上半圓在區間 $[-1,1]$ 的面積，為 $\frac{1}{4} \times \pi \times 2 + \frac{2 \times 1 \times 1}{2} = \frac{\pi}{2} + 1$ 。

$$\text{故 } \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx - \int_{-1}^1 \sqrt{2-x^2} dx = \frac{8}{3} - \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}。$$

二、評分原則：

(1) 正確計算扇形面積 COP 為 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{6}$ ，且有正確的解題過程。

(2) 正確計算得到題意所求區域面積為 $\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$ ，且有正確的解題過程。

第 16 題

一、滿分參考答案：

因為 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3} \right)$ 為長軸的其中一個頂點，且短軸與長軸垂直，故 Γ' 的短軸位在直

線 $2y = \sqrt{5}x$ 上，代入方程式 $40x^2 + 4\sqrt{5}xy + 41y^2 = 180$ ，得 $x^2 = \frac{16}{9}$ ，故 $\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3} \right)$ 為短軸

的其中一個頂點，短軸長為 $2\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2} = 4$ 。

二、評分原則：

(1) 正確計算得到短軸的方程式 $2y = \sqrt{5}x$ ，且有正確的解題過程。

(2) 正確計算得到短軸長為 4，且有正確的解題過程。

第 17 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

依據題意，線性變換將 $(1,0)$ 變換到 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ 且將 $(0,1)$ 變換到

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(-\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right), \text{ 所以線性變換的矩陣表示為 } \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

$$\text{設 } P \text{ 點坐標為 } (x, y), (x, y) \text{ 由此線性變換可得 } \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{5}}{3}y \\ \frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y \end{bmatrix},$$

$$P' \left(\frac{2}{3}x - \frac{\sqrt{5}}{3}y, \frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y \right) \text{ 在 } x \text{ 軸上, 可推得 } y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

因為 Γ 的方程式為 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ 且 P 點在 Γ 上, 將 $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$ 代入, 解得 $x^2 = 2$

因旋轉角 θ 為銳角, P 點在第四象限, 故 $x = \sqrt{2}, y = -\frac{\sqrt{10}}{2}$,

$$P \text{ 點坐標為 } \left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2} \right).$$

【解法二】

設 P' 點坐標為 $(a, 0), a > 0$, 代入 Γ' 的方程式,

$$\text{則 } 40 \times a^2 = 180 \Rightarrow a^2 = \frac{180}{40} = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 得到 } P' \text{ 點坐標為 } \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\text{旋轉 } \theta \text{ 角, 則 } \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}, \sin \theta = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{旋轉矩陣為 } \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ 且其逆矩陣為 } \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}, P \text{ 點坐標為 } \left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2} \right).$$

二、評分原則：

(1) 利用試題條件解得橢圓 Γ 的標準式 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ 與 P 點在 $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$ 上，推得 P 點坐標為 $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ ，且有正確的解題過程。

(2) 正確計算 P' 點坐標為 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 與正確寫出旋轉矩陣 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ 的逆矩陣

$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ，推得 P 點坐標為 $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ ，且有正確的解題過程。