財團法人大學入學考試中心基金會

111學年度分科測驗試題

數學甲考科

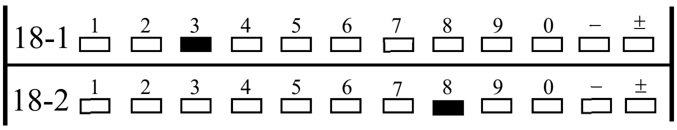
—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

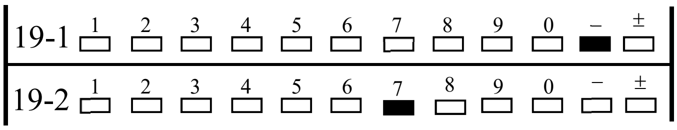
作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

  例：若答案格式是 $\dfrac{(18\text{-}1)}{(18\text{-}2)}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 3 與第 18-2 列的 8 劃記，如：



  例：若答案格式是 $\dfrac{(19\text{-}1)(19\text{-}2)}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 − 與第 19-2 列的 7 劃記，如：



選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占76分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 設 a_1,a_2,a_3,a_4 是首項為 10、公比是 10 的等比數列。令 $b=\sum_{n=1}^{3}\log_{a_n} a_{n+1}$，試選出正確的選項。

   (1) $2<b\le 3$　(2) $3<b\le 4$　(3) $4<b\le 5$　(4) $5<b\le 6$　(5) $6<b\le 7$

2. 設 c 為實數使得三元一次方程組 $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+cy+3z=1 \\ 3x-3y+cz=0 \end{cases}$ 無解。試選出 c 之值。

   (1) -3　(2) -2　(3) 0　(4) 2　(5) 3

3. 坐標空間中 O 為原點，點 P 在第一卦限且 $\overline{OP}=1$。已知直線 OP 與 x 軸有一夾角為 $45°$，且 P 點到 y 軸的距離為 $\frac{\sqrt{6}}{3}$。試選出點 P 的 z 坐標。

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 設多項式 $f(x)=x^3+2x^2-2x+k$ 、 $g(x)=x^2+ax+1$，其中 k,a 為實數。已知 $g(x)$ 整除 $f(x)$，且方程式 $g(x)=0$ 有虛根。試選出為方程式 $f(x)=0$ 的根之選項。

(1) -3 (2) 0 (3) 1 (4) $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ (5) $\frac{3+\sqrt{-5}}{2}$

5. 坐標平面上有一圖形 Γ，其方程式為 $(x-1)^2+(y-1)^2=101$。試選出正確的選項。

(1) Γ與 x 軸負向、y 軸負向分別交於 $(-9,0)$、$(0,-9)$

(2) Γ上 x 坐標最大的點是點 $(11,0)$

(3) Γ上的點與原點距離的最大值為 $\sqrt{2}+\sqrt{101}$

(4) Γ在第三象限的點之極坐標可用 $[9,\theta]$ 表示，其中 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

(5) Γ經旋轉線性變換後，其圖形仍可用一個不含 xy 項的二元二次方程式表示

6. 假設 2 階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換將坐標平面上三點 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ 分別映射到 $O(0,0)$, $A'(3,\sqrt{3})$, $B'(-\sqrt{3},3)$，並將與原點距離為 1 的點 $C(x,y)$ 映射到點 $C'(x',y')$。試選出正確的選項。

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=6$

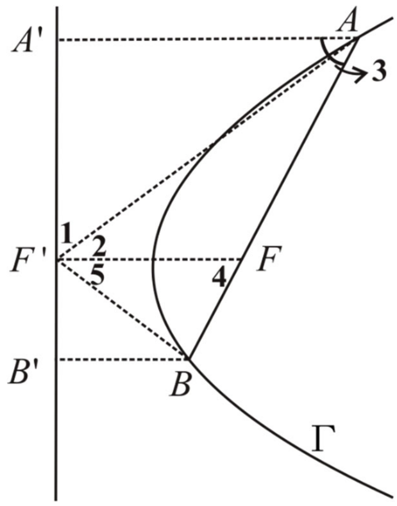
(2) $\overline{OC'}=2\sqrt{3}$

(3) $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OC'}$ 的夾角為 $60°$

(4) 有可能 $y=y'$

(5) 若 $x<y$ 則 $x'<y'$

7. 假設 A,B 為一拋物線 Γ 上兩點且其連線段通過 Γ 的焦點 F。設 A,F,B 在 Γ 之準線上的投影分別為 A',F',B'。試選出等於 $\dfrac{\overline{A'F'}}{\overline{A'A}}$ 的選項。（注意：此示意圖僅說明各點的相關位置，各點間距離關係並不正確）



(1) $\tan\angle 1$，其中 $\angle 1 = \angle A'F'A$
(2) $\sin\angle 2$，其中 $\angle 2 = \angle AF'F$
(3) $\sin\angle 3$，其中 $\angle 3 = \angle A'AF$
(4) $\cos\angle 4$，其中 $\angle 4 = \angle F'FB$
(5) $\tan\angle 5$，其中 $\angle 5 = \angle FF'B$

8. 假設兩數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$，對所有正整數 n 都滿足 $b_n + \dfrac{4n-1}{n} < a_n < 3b_n$。已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$，試選出正確的選項。

(1) $b_n < 6 - \dfrac{4n-1}{n}$　　(2) $b_n > \dfrac{4n-1}{2n}$　　(3) 數列 $\langle b_n\rangle$ 有可能發散
(4) $a_{10000} < 6.1$　　(5) $a_{10000} > 5.9$

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 大吉百貨春節期間準備許多紅包讓顧客抽籤得紅包，並宣稱活動會一直持續到送出所有的紅包。抽籤的籤筒內有 5 支籤、其中只有 1 支籤有標示「大吉」，且每支籤被抽中的機會均等。每位顧客從籤筒中抽取一支籤記錄後，將籤放回籤筒再抽下一回，最多抽取 3 回。當抽取過程中出現連續兩回抽中「大吉」，則該顧客停止抽籤並得到紅包。
我們可將每位顧客抽籤是否得到紅包視為一次伯努力試驗。設整個活動第一個得到紅包的顧客是第 X 位抽籤的顧客，並以 $E(X)$ 表示隨機變數 X 的期望值，則 $E(X)=$ ⑨-1 ⑨-2 。（四捨五入到整數位）

10. 老師要求班上學藝安排在下週一、二、三、四這4天，發完國、英、數、社、自共5張複習卷，每天至少發其中一科的卷子給同學帶回家練習，隔天繳交。由於週二有國、英兩門課，國文老師要求國文的卷子一定要在週一發出以便檢討；而英文老師因為當天另有指派作業，所以要求英文的卷子不要在週二發出。依此要求，學藝共有 ⑩-1 ⑩-2 種安排方式。

11. 在複數平面上，複數 z 在第一象限且滿足 $|z|=1$ 以及 $\left|\frac{-3+4i}{5}-z^3\right|=\left|\frac{-3+4i}{5}-z\right|$，其中 $i=\sqrt{-1}$。若 z 的實部為 a、虛部為 b，則 $a=\dfrac{\sqrt{\text{(11-1)}}}{\text{(11-2)}}$、$b=\dfrac{\text{(11-3)}\sqrt{\text{(11-4)}}}{\text{(11-5)}}$。（化為最簡根式）

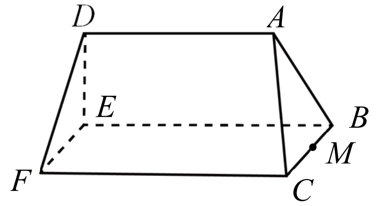
背 面 還 有 試 題

第貳部分、混合題或非選擇題（占 **24** 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選填題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

有一積木（如圖），其中 $ACFD$ 和 $ABED$ 是兩個全等的等腰梯形，$BCFE$ 是一個矩形。設 A 點在直線 BC 的投影為 M 且在平面 $BCFE$ 的投影為 P。已知 $\overline{AD}=30$、$\overline{CF}=40$、$\overline{AP}=15$ 且 $\overline{BC}=10$。將平面 $BCFE$ 置於水平桌面上，且將與 $BCFE$ 平行的平面稱為水平面。



試回答下列問題。

12. 利用 $\overline{AD}$ 在平面 $BCFE$ 的投影長為 30，可得 $\tan\angle AMP=$ ⑫ 。（選填題，2 分）

13. 令 Q 為 $\overline{FC}$ 上一點，滿足 $\overrightarrow{AQ}$ 與 $\overrightarrow{DF}$ 平行。利用 ΔABC、ΔACQ 為全等三角形，證明若水平面 W 介於 A,P 之間且與 A 的距離為 x，則 W 與此積木所截的矩形區域之面積為 $20x+\frac{4}{9}x^2$。（非選擇題，4 分）

14. 將線段 $\overline{AP}$ 的 n 等分點沿著向量 $\overrightarrow{AP}$ 的方向依序設為 $A=P_0,P_1,\ldots,P_{n-1},P_n=P$。在每一個分段 $\overline{P_{k-1}P_k}$，考慮以通過 P_k 的水平面與此積木所截的矩形為底、$\overline{P_{k-1}P_k}$ 為高，所形成的長方體。請利用此切片方法寫下估計此積木體積的黎曼和（不需化簡），且以定積分形式表示此積木的體積並求其值。（非選擇題，6 分）

背 面 還 有 試 題

15-17 題為題組

考慮坐標平面上之向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 滿足 $|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|=9$ 以及 $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=7$。若令 $|\overrightarrow{a}|=x$，其中 $1<x<8$，且令 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的夾角為 θ，則利用向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 所形成的三角形，可將 $\cos\theta$ 以 x 表示成 $\dfrac{c}{9x-x^2}+d$，其中 c、d 為常數且 $c>0$。令此表示式為 $f(x)$，且其定義域為 $\{x \mid 1<x<8\}$。試回答下列問題。

15. 求 $f(x)$ 及其導函數。(非選擇題，4 分)

16. 說明 $f(x)$ 在定義域中遞增、遞減的情況。並說明 x 為多少時 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的夾角 θ 最大。(非選擇題，4 分)

17. 利用 $f(x)$ 的一次估計（一次近似），求當 $x=4.96$ 時，$\cos\theta$ 約為多少？
（非選擇題，4 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a ，公比為 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和： $\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

4. ΔABC 的正弦定理： $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ （ R 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理： $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 一維數據 $X:x_1,x_2,\cdots,x_n$ ，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ；標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-n\mu_X{}^2)}$

6. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ ，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適直線（迴歸直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值： $\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{3}\approx 1.732$, $\sqrt{5}\approx 2.236$, $\sqrt{6}\approx 2.449$, $\pi\approx 3.142$

   $\sin 23^\circ\approx 0.40$, $\sin 37^\circ\approx 0.60$, $\sin 53^\circ\approx 0.80$, $\cos 23^\circ\approx 0.92$, $\cos 37^\circ\approx 0.80$, $\cos 53^\circ\approx 0.60$

8. 對數值： $\log 2\approx 0.3010$, $\log 3\approx 0.4771$, $\log 5\approx 0.6990$, $\log 7\approx 0.8451$

9. 若 $X\sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X)=np$ ，變異數 $Var(X)=np(1-p)$ ；

   若 $X\sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$ ，變異數 $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$ 。