110 學年度指定科目考試
數學乙考科非選擇題參考答案

數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 9 月 15 日出刊的《選才電子報》。

110 學年度指定科目考試數學乙考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)小題

因為 A, B 兩點的坐標分別為 $(-3,4)$ 和 $(3,2)$ ，

$\overrightarrow{AB}=(6,-2)$ ，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}=(6,-2)\cdot(4,-3)=6\times4+(-2)\times(-3)=30$

第(2)小題

解法一：距離公式

直線 L 的法向量為 $(4,-3)$ ，令直線 L 的方程式為 $4x-3y+k=0$ 。

因為 A 點到 L 的距離為 B 點到 L 的距離的 5 倍，我們有

$$\frac{|4\times(-3)-3\times4+k|}{5}=5\times\frac{|4\times3-3\times2+k|}{5}，$$

因為 A, B 兩點在 L 的兩側，去掉絕對值後（ $k-24$ 和 $6+k$ 異號），我們會有

$-(k-24)=5(6+k)$ 。

可解出 $k=-1$ ，即直線 L 的方程式為 $4x-3y-1=0$ 。

解法二：分點公式求點 C

令直線 L 和 $\overleftrightarrow{AB}$ 交於一點 C。

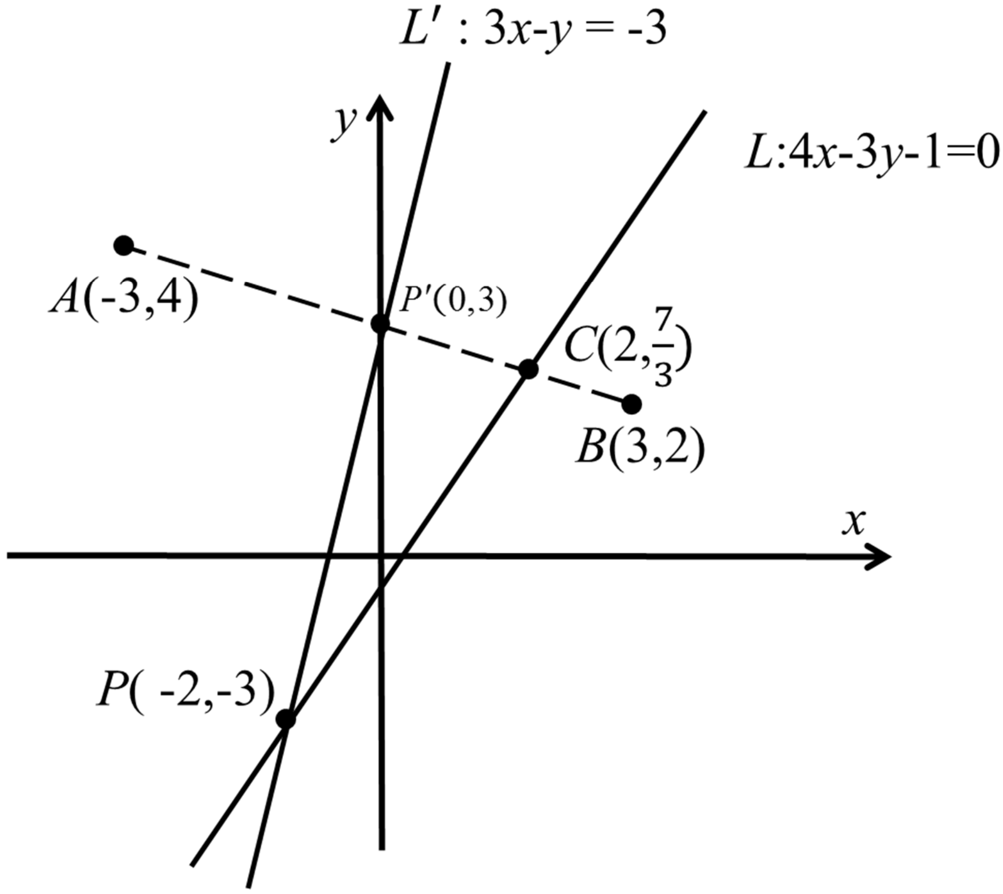
因為 A 點到 L 的距離為 B 點到 L 的距離的 5 倍，由比例性質，我們有 $\overline{AC}:\overline{BC}=5:1$

因為 A,B 兩點在 L 的兩側，C 點會落在 $\overline{AB}$ 上。由分點公式，C 點的坐標為

$$\frac{1}{6}(-3,4)+\frac{5}{6}(3,2)=(2,\frac{7}{3})$$

因為直線 L 的法向量為 $(4,-3)$，其斜率為 $\frac{4}{3}$，而 $C(2,\frac{7}{3})$ 為 L 上一點，

可得 L 的方程式為 $y-\frac{7}{3}=\frac{4}{3}(x-2)$，即 $4x-3y-1=0$



第(3)小題

解法一：參數式

由(2)，直線 L 的方程式為 $4x-3y=1$，可知 L 的參數式為 $L:\begin{cases} x=1+3t \\ y=1+4t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ 。

令 P 點的坐標為 $(1+3t,1+4t)$ ，因為 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，我們有

$$\sqrt{\left[(1+3t)-(-3)\right]^2+\left[(1+4t)-4\right]^2}=\sqrt{\left[(1+3t)-3\right]^2+\left[(1+4t)-2\right]^2}$$ ，

可解出 $t=-1$。故 P 點的坐標為 $(-2,-3)$ 。

註：直線 L 的參數式有很多種不同的型式，如： $L:\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{4t-1}{3} \end{cases}$ ；$L:\begin{cases} x=\dfrac{3t+1}{4} \\ y=t \end{cases}$ 。

解法二：兩點距離

令 P 點的坐標為 (x,y)。因為 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，我們有

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

即 $3x-y=-3$。又因為 P 在 L 上，我們有 $4x-3y=1$。

解聯立，得 P 點的坐標為 $(-2,-3)$ 。

解法三：中垂線

因為 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，P 點落在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上。

因為 A,B 兩點的坐標分別為 $(-3,4)$ 和 $(3,2)$ ， A,B 中點 D 的坐標為 $(0,3)$ ，且 $\overline{AB}$ 的垂直平分線的法向量為 $(3,-1)$。故 $\overline{AB}$ 的垂直平分線的方程式為 $L':3x-y=-3$。由此， L 和 L' 的交點 P 坐標為 $(-2,-3)$ 。

解法四：中垂線以參數式表示

$\overline{AB}$ 中點 $P'=(0,3)$ ，得中垂線 $L':\begin{cases} x=t \\ y=3+3t \end{cases}$ 。令 P 點坐標為 $(t,3+3t)$ 代入直線 $L:4x-3y=1$ 中，可得 $t=-2$ ，解得 P 點的坐標為 $(-2,-3)$ 。

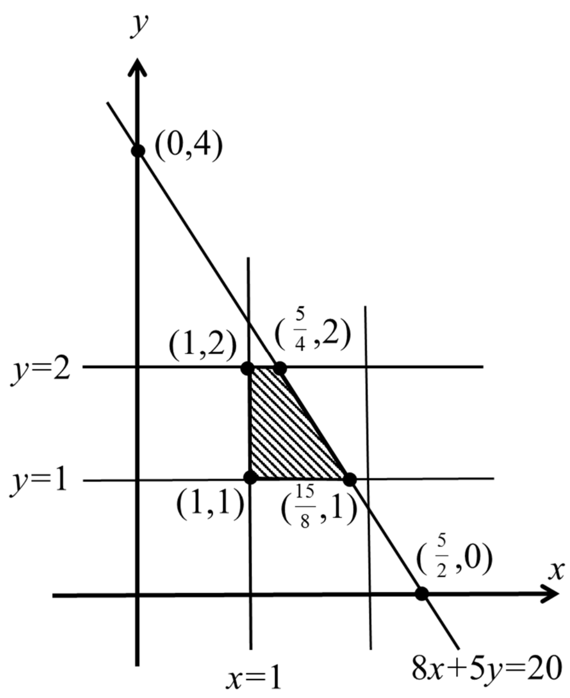
第二題

第(1)小題

甲型車和乙型車的售價分別為$56x+26y+48\times(\frac{x+y}{2})$、$40x+20y+56\times(\frac{x+y}{2})$，經化簡可得$80x+50y$與$68x+48y$。因為$x, y>0$，甲車售價$=80x+50y>68x+48y=$乙車售價（或甲－乙＝$12x+2y>0$）。

第(2)小題

指出可行解區域是由$\begin{cases} x\geq 1 \\ 1\leq y\leq 2 \\ 8x+5y\leq 20 \end{cases}$所繪出的梯形區域，如下圖。



第(3)小題

解法一：頂點法

甲乙兩型車的售價差所對應的目標函數為 $P(x,y)=12x+2y$ ，　我們要在限制條件下，

求 $P(x,y)$ 的最大值。將四個頂點 $(1,1),(1,2),(\frac{15}{8},1),(\frac{5}{4},2)$ 分別代入目標函數得下表。

(x,y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(\frac{15}{8},1)$	$(\frac{5}{4},2)$
$P(x,y)=12x+2y$	14	16	$\frac{49}{2}$	19

最大值發生在 $(\frac{15}{8},1)$ 這個點。故當 $x=\frac{15}{8},y=1$ 時，甲乙兩型車的售價差距最大。

此時，兩型車的售價差距為 24.5 萬元。

解法二：平行線法

甲乙兩型車的售價差所對應的目標函數為 $P(x,y)=12x+2y$

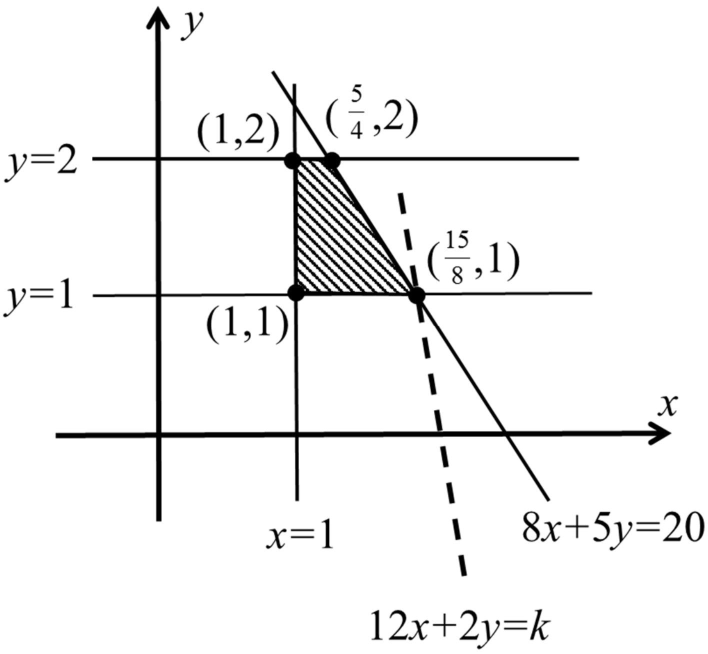
我們要在限制條件下，求 $P(x,y)$ 的最大值。

求出正確的 $(\frac{15}{8},1)$ ，並以下列理由之一說明。

(1) $8x+5y=20$ 這條直線的斜率為 $-\frac{8}{5}$ ，而 $12x+2y=k$ 這些平行直線的斜率為 -6 。

因為 $-6<-\frac{8}{5}$ ，當 $12x+2y=k$ 這些平行直線於可行解區域平行移動時，最後通過可行解區域的點為 $(\frac{15}{8},1)$ 。

(2) 畫出一條過 $(\frac{15}{8},1)$ 且與直線 $12x+2y=k$ 平行的直線，如下圖。



最大值發生在$(\frac{15}{8},1)$這個點。故當$x=\frac{15}{8}, y=1$時，甲乙兩型車的售價差距最大。

此時，兩型車的售價差距為24.5萬元。