108學年度指定科目考試
數學甲非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於8月15日出刊的《選才電子報》。

108學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)小題

$\overrightarrow{OA}$的長度為 $\sqrt{1+2+1}=2$，

所以 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos 60^\circ=2\times 2\times\dfrac{1}{2}=2$。

第(2)小題

設 P 之坐標為 $P(x,y,z)$，由(1)得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=2$，所以 $(1,\sqrt{2},1)\cdot(x,y,z)=2$，即 P 在平面 E：$x+\sqrt{2}y+z=2$ 上。

第(3)小題

設 $Q(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OQ}|\cos 60^\circ=2\times 2\times\dfrac{1}{2}=2$，得 $(2,0,0)\cdot(x,y,z)=2$，

即 Q 在平面 $x=1$ 上。由(1)可得出直線 L 為兩平面 $x+\sqrt{2}y+z=2$、$x=1$ 的交線，其法向量分別為 $(1,\sqrt{2},1)$、$(1,0,0)$，故直線 L 的方向向量為

外積 $(1,\sqrt{2},1)\times(1,0,0)=(0,1,-\sqrt{2})$，所以直線 L 的方向向量為 $(0,1,-\sqrt{2})$ 或其非零的常數倍。

第(4)小題

直線 L 上任取一點，例如 $(1,0,1)$，由(3)直線 L 的方向向量為 $(0,1,-\sqrt{2})$，可知直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=1-\sqrt{2}t \end{cases}$，可設點 $Q(1,t,1-\sqrt{2}t)$。

因 $|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{1^2+t^2+(1-\sqrt{2}t)^2}=2$

平方後，整理得到 $3t^2-2\sqrt{2}t-2=0$，解得 $t=\sqrt{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

對應的點 Q 坐標為 $(1,\sqrt{2},-1)$ 或 $(1,\dfrac{-\sqrt{2}}{3},\dfrac{5}{3})$

第二題

第(1)(2)(3)小題

解法一

(1)

$x=1$代入題設 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)dt$ 中，由於 $\int_1^1 f(t)dt=0$，

得 $f(1)=3-2+1+0=2$。

(2)

利用微積分基本定理，$\int_1^x f(t)dt$的微分為 $f(x)$，

將 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)dt$ 兩邊微分，

得 $f(x)+xf'(x)=12x^3-6x^2+2x+f(x)$。

因此 $f'(x)=12x^2-6x+2$。

(3)

由(2)可知 $f(x)=4x^3-3x^2+2x+C$，又由(1)知 $f(1)=2$，代入解得 $C=-1$；

故 $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$。

解法二

由題意設 $f(x)$為實係數多項式函數，如果 $f(x)$的次數大於 3，

$xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)\,dt$等式兩邊的最高次項不可能相等。

故可設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\Rightarrow xf(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$

$\int_1^x f(t)dt=\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx-(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d)$

由 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)\,dt$ 可得

$ax^4+bx^3+cx^2+dx=3x^4-2x^3+x^2+\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx-(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d)$

比較係數可得 $a=4, b=-3, c=2, d=-1$

故 $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$

$f(1)=4-3+2-1=2$

$f'(x)=12x^2-6x+2$

(4)

令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt = x^4-x^3+x^2-x$ ，

(i)說明存在性：以下提供兩種解法說明存在性。

(A) $F(x)$的最高次項係數為正，所以函數無上界；又 $F(1)=0$，再由多項式函數為連續函數，故存在實數 $a>1$ 滿足 $F(a)=1$ 。

(B) 因為 $F(1)=0$ 且存在一個實數 $b>1$，滿足 $F(b)>1$，例如 $F(2)=10$，再由多項式函數為連續函數，故存在實數 $a>1$滿足 $F(a)=1$。

(ii)說明唯一性：以下提供兩種解法說明唯一性。

(A) 導函數 $F'(x)=(4x^3-3x^2)+(2x-1)=x^2(4x-3)+(2x-1)$ ，在 $x\geq 1$ 時，$F'(x)>0$。因此，在 $x\geq 1$時，$F(x)$為嚴格遞增函數，故至多存在一個實數 $a>1$滿足 $F(a)=1$。

(B) 由 $F''(x)=12x^2-6x+2$ 恆為正，所以 $F(x)$的圖形在 $x\geq 1$時為凹口向上。因為 $F'(1)=f(1)=2>0$ ，所以當 $x\geq 1$時， $F(x)$為嚴格遞增函數，故至多存在一個實數 $a>1$滿足 $F(a)=1$。

由(i)(ii)得知恰有一實數 $a>1$滿足 $F(a)=\int_0^a f(x)\,dx=1$。