107 學年度指定科目考試
數學甲考科非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)(2)小題

解法一

正確寫出可決定坐標系的頂點坐標。例如設 $A(0,0,0)$，$B(a,0,0)$，$D(0,a,0)$，$E(0,0,a)$，推得 $G(a,a,a)$，及平面 BDE 的方程式為 $x+y+z=a$。

因 $A(0,0,0)$ 到平面 $x+y+z=a$ 的距離為 $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，且 $\overline{AG}$ 為 $\sqrt{3}a$，故得證第(1)小題。

另外 $\overrightarrow{AG}=(a,a,a)$，與平面 BDE： $x+y+z=a$ 的法向量 $(1,1,1)$ 平行，故得證第(2)小題。

解法二

利用向量的方法

由 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AG}\bullet(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overline{AD}^2-\overline{AB}^2=0$，

同理 $\overrightarrow{AG}\bullet\overrightarrow{BE}=0$， 因為 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 的兩向量 $\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{BE}$ 皆垂直，

所以 $\overrightarrow{AG}$ 與平面 BDE 垂直，故得證第(2)小題。

令 P 為 A 對平面 BDE 的投影點，因 $\overrightarrow{AG}$ 與 $\overrightarrow{AP}$ 平行，

且 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\alpha(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$。

因 P 在平面 BDE 上，得 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$(因為係數和須為 1)。

所以 $\overline{AP}$ 是 $\overline{AG}$ 的三分之一，即 A 到平面 BDE 距離是 $\overline{AG}$ 的三分之一。故得證第(1)小題。

解法三

設正方體的邊長為 a。所以四面體 $ABDE$ 的體積為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times a=\frac{1}{6}a^3$。

設 A點到平面 BDE 的距離為 h，而三角形 BDE 為邊長為 $\sqrt{2}a$的正三角形，其面積為 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$。推得四面體 $ABDE$ 的體積為 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\times h$，由 $\frac{1}{6}a^3=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\times h$，可解得高 $h=\frac{1}{\sqrt{3}}a$，而對角線長度 $\overline{AG}$ 為 $\sqrt{3}a$，故得證第(1)小題。

因正四面體 $GBDE$ 的邊長為 $\sqrt{2}a$，其高為 $\sqrt{\frac{2}{3}}\times(\sqrt{2}a)$，即 G 點到平面 BDE 的距離為 $\frac{2}{3}\sqrt{3}a$，加上 A 點到平面 BDE 的距離為 $\frac{1}{3}\sqrt{3}a$，恰等於 A 點到 G 點的距離為 $\sqrt{3}a$，故得證第(2)小題。

第(3)小題

由點到平面的公式，可得 A點到平面 BDE的距離為 $\frac{|2\times 2+2\times 2-6+7|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$。

第(4)小題

解法一

由(2)可知向量$\overrightarrow{AG}$與平面 BDE垂直，由(1)(3)可知對角線 $\overline{AG}$長度為 $3\times 3=9$，

故$\overrightarrow{AG}=\pm 3(2,2,-1)$，故 G 可能坐標為 $(-4,-4,9)$或 $(8,8,3)$，但 A,G兩點位在平面的兩側，所以 G 點坐標為 $(-4,-4,9)$。

解法二

設 Q 點為 $\overline{AG}$與平面 BDE的交點，因為$\overrightarrow{AG}$與平面 BDE垂直，考慮直線 AQ 的參數式 $\begin{cases} x=2-2t \\ y=2-2t \\ z=6-(-1)t \end{cases}$，$t\in R$

代入 BDE 平面方程式 $2x+2y-z=-7$ 得到 $t=1$，所以 $Q=\left(0,0,7\right)$，

即$\overrightarrow{AQ}=(-2,-2,1)$。由(1)(2)小題得到$\overrightarrow{AG}=3(-2,-2,1)$，

推得 G 點坐標 $=\left(2,2,6\right)+3(-2,-2,1)=\left(-4,-4,9\right)$

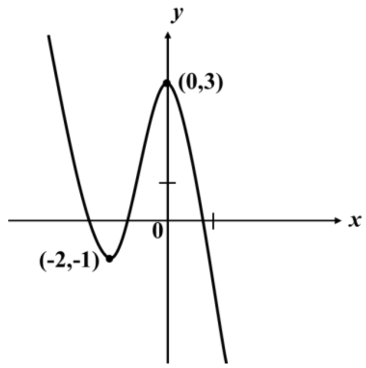
第二題

第(1)小題

由 $f'(x)=-3x^2-6x=-3x(x+2)$

知 $f(x)$ 在 $x=-2$ 有極小值 -1、在 $x=0$ 有極大值 3。

由首項係數小於 0，得以下 $y=f(x)$ 的圖。



第(2)小題

因為 $f(-3)=3$、 $f(-2)=-1$、 $f(-1)=1$、 $f(0)=3$、 $f(1)=-1$，

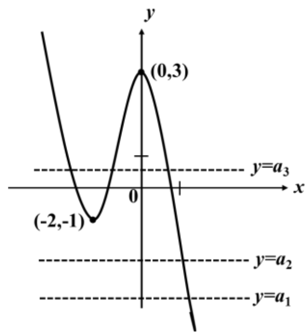
x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$

可知 $f(x)=0$ 分別在區間 $(-3,-2)$、 $(-2,-1)$、 $(0,1)$ 各有一個實根。

因為 $a_1<a_2<a_3$，故 $-3<a_1<-2$、 $-2<a_2<-1$、 $0<a_3<1$。

第(3)小題

由(2)知 $-3<a_1<-2$、 $-2<a_2<-1$、 $0<a_3<1$，由 a_1,a_2 皆小於極小值 -1，可知水平線 $y=a_1$ 或 $y=a_2$ 與 $y=f(x)$ 的圖形皆僅有一交點，又因 a_3 介於極大值 3 與極小值 -1 之間，故 $y=a_3$ 與 $y=f(x)$ 的圖形有三交點；因此 $f(x)=a_1$， $f(x)=a_2$ 皆恰有一實根，而 $f(x)=a_3$ 有三相異實根。



第(4)小題

由 $f(x)=-(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$，

知求解 $f(f(x))=0$ 等價於求 $-(f(x)-a_1)(f(x)-a_2)(f(x)-a_3)=0$ 的所有實數解，由(3)知共有 $1+1+3=5$ 個相異實根。