106 學年度指定科目考試數學甲非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

106 學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

題目：

一. 在坐標平面上，考慮二階方陣 $A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1，設 P_1 經 A 變換成 P_2，P_2 經 A 變換成 P_3。令 $a=\overline{OP_1}$。

(1) 試求 $\sin(\angle P_1OP_3)$。（4 分）

(2) 試以 a 表示 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面積。（4 分）

(3) 假設 P_1 是圖形 $y=\frac{1}{10}x^2-10$ 上的動點，試求 $\Delta P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值。（4 分）

參考答案：

(1)

【法一】

$$A=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$ 為旋轉矩陣，其中旋轉角 θ 為銳角，

且 $\cos\theta=\frac{4}{5},\sin\theta=\frac{3}{5}$。

因此，$\sin\angle P_1OP_3=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$。

【法二】

設 $P_1(\alpha,\beta)$，其中 $\alpha^2+\beta^2=a^2$。

由 $P_2=AP_1$ 、 $P_3=AP_2$ 可推得

$P_2(\dfrac{4\alpha-3\beta}{5},\dfrac{3\alpha+4\beta}{5})$ ， $P_3(\dfrac{7\alpha-24\beta}{25},\dfrac{24\alpha+7\beta}{25})$ 。

於是可得 $\cos\angle P_1OP_3=\dfrac{\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_3}}{\overline{OP_1}\cdot\overline{OP_3}}=\dfrac{\frac{7}{25}(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2}=\dfrac{7}{25}$ 。

因此，$\sin\angle P_1OP_3=\sqrt{1-(\frac{7}{25})^2}=\dfrac{24}{25}$ 。

(2)

【法一】

$$\Delta P_1P_2P_3=\Delta OP_1P_2+\Delta OP_2P_3-\Delta OP_1P_3=\frac{1}{2}\cdot a^2\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot a^2\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot a^2\sin 2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{24}{25}=\frac{3a^2}{25}$$ 。

【法二】

可設 $P_1(a,0)$，則 $P_2(\dfrac{4a}{5},\dfrac{3a}{5}),P_3(\dfrac{7a}{25},\dfrac{24a}{25})$。再令 P_2 到 $\overline{P_1P_3}$ 的垂足為 Q 。

因 $\Delta P_1P_2P_3$ 為等腰三角形，且 $\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}=\dfrac{\sqrt{10}a}{5}$ 、 $\overline{P_1P_3}=\dfrac{6a}{5}$ ，

可得 $\overline{P_2Q}=\sqrt{\overline{P_1P_2}^2-(\frac{1}{2}\overline{P_1P_3})^2}=\dfrac{a}{5}$ 。

因此，$\Delta P_1P_2P_3=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{P_1P_3}\cdot\overline{P_2Q}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6a}{5}\cdot\dfrac{a}{5}=\dfrac{3a^2}{25}$ 。

【法三】

因 $\angle OP_1P_2=\angle OP_2P_1=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\theta)$，得 $\angle P_1P_2P_3=2\angle OP_2P_1=180^\circ-\theta$ 。

故 $\Delta P_1P_2P_3=\dfrac{1}{2}\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\sin\angle P_1P_2P_3=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{10}a}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{10}a}{5}\cdot\sin\theta=\dfrac{a^2}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{3a^2}{25}$ 。

【法四】

可設 $P_1(\alpha,\beta)$，其中 $\alpha^2+\beta^2=a^2$，則可推得

$\overrightarrow{P_1P_2}=\frac{1}{5}(-\alpha-3\beta,3\alpha-\beta)$，$\overrightarrow{P_1P_3}=\frac{1}{25}(-18\alpha-24\beta,24\alpha-18\beta)$。

因此，$\Delta P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\frac{1}{5}(-\alpha-3\beta) & \frac{1}{5}(3\alpha-\beta)\\ \frac{1}{25}(-18\alpha-24\beta) & \frac{1}{25}(24\alpha-18\beta)\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{25}(\alpha^2+\beta^2)=\frac{3a^2}{25}$。

(3)

【法一】

可設拋物線上的點 $P_1(x,\frac{x^2}{10}-10)$，則

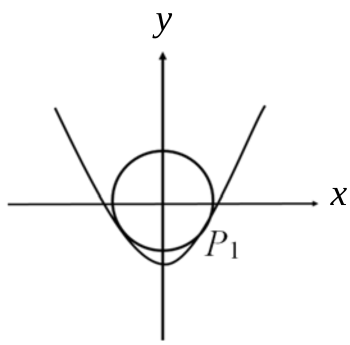
$a=\overline{OP_1}=\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2}{10}-10\right)^2}=\sqrt{\frac{x^4}{100}-x^2+100}=\frac{1}{10}\sqrt{x^4-100x^2+10000}$

$=\frac{1}{10}\sqrt{(x^2-50)^2+7500}\quad\geq\sqrt{75}$。(等號於 $x=\pm5\sqrt{2}$ 時成立)

因此，所求面積 $\Delta P_1P_2P_3$ 的最小值為 $\frac{3a^2}{25}=\frac{3\times75}{25}=9$。

【法二】

設在點 $P_1(t,\frac{t^2}{10}-10)$ 時，$\Delta P_1P_2P_3$ 面積最小。



由 $y'=\frac{x}{5}$，得知 $\frac{t}{5}\times\frac{\frac{t^2}{10}-10}{t}=-1$，解得 $t=\pm5\sqrt{2}$，

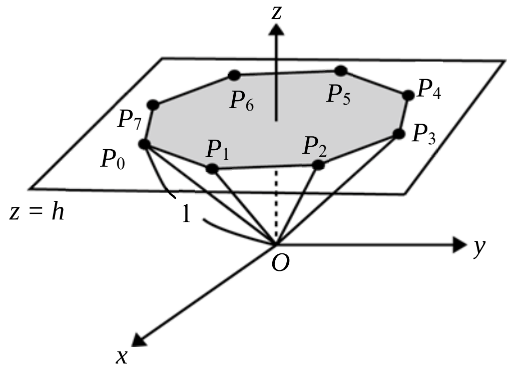
此時 $P_1(5\sqrt{2},-5)$ 或 $(-5\sqrt{2},-5)$，

得知 $a=\overline{OP_1}=\sqrt{50+25}=\sqrt{75}$。

因此，$\Delta P_1P_2P_3$ 面積最小值為 $\frac{3a^2}{25}=\frac{3\times75}{25}=9$。

第二題

二、坐標空間中，$O(0,0,0)$ 為原點。平面 $z=h$（其中 $0\le h\le 1$）上有一以 $(0,0,h)$ 為圓心的圓，在此圓上依逆時鐘順序取 8 點構成正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$，使得各線段 $\overline{OP_j}$ $(0\le j\le 7)$ 的長度都是 1。請參見示意圖。



(1) 試以 h 表示向量內積 $\overrightarrow{OP_0}\bullet\overrightarrow{OP_4}$。（4 分）

(2) 若 $V(h)$ 為以 O 為頂點、正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ 為底的正八角錐體積，試將 $V(h)$ 表為 h 的函數（註:角錐體積$=\frac{1}{3}$底面積×高）。（2 分）

(3) 在 $\overrightarrow{OP_0}$ 和 $\overrightarrow{OP_4}$ 夾角不超過 $90°$ 的條件下，試問正八角錐體積 $V(h)$ 的最大值為何？（6 分）

參考答案：

(1)

【法一】

設正八邊形的中心為 $A(0,0,h)$ 且 $\theta=\angle AOP_i$ （$i=0,1,2,\cdots,7$）。由題意可知：

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP_i}}=h$，而 $\overline{AP_i}=\sin\theta=\sqrt{1-h^2}$（$i=0,1,2,\cdots,7$）。

因此，$\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}=\overline{OP_0}\cdot\overline{OP_4}\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2h^2-1$。

【法二】

可設 $P_0(\sqrt{1-h^2},0,h),P_4(-\sqrt{1-h^2},0,h)$，則

$\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}=-(1-h^2)+h^2=2h^2-1$。

【法三】

設正八邊形的中心為 A，得知 $\overrightarrow{AP_0}=-\overrightarrow{AP_4}$，故

$$\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP_0})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP_4})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP_0}\cdot\overrightarrow{AP_4}$$

$$=\overline{OA}^2-\overline{AP_0}^2=h^2-(1-h^2)=2h^2-1$$

(2)

正八邊形 $P_0P_1P_2\cdots P_7$ 的面積為 $8\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{AP_0}\cdot\overline{AP_1}\cdot\sin\frac{360°}{8}=2\sqrt{2}(1-h^2)$。

因此，正八角錐體積 $V(h)=\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{2}(1-h^2)\cdot h=\frac{2\sqrt{2}}{3}(h-h^3)$。

(3)

由 $\angle P_0OP_4=2\theta\le 90°$，可推得 $\theta\le 45°$，故 $h=\cos\theta\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$。又 $0\le h\le 1$，因此，

$$1\ge h\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\text{。}$$

由 $V'(h)=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1-3h^2)=0$，得知 $h=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 為臨界點(取正)。

$$V'(h)=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1-3h^2)\ \begin{cases}\ge 0 & \text{當 } 0\le h\le\frac{\sqrt{3}}{3}\\ <0 & \text{當 } \frac{\sqrt{3}}{3}<h\le 1\end{cases}\text{。}$$

即函數 $V(h)$ 在 $[0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$ 上遞增，而在 $[\frac{\sqrt{3}}{3},1]$ 上遞減。因此，由一階導數判別法，可知：$V(h)$ 在 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 時有相對極大值。

因為 $\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，函數 $V(h)$ 在區間 $[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$ 上也遞減，故 $V(h)$ 在區間 $[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$ 上的最大值為 $V(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{2\sqrt{2}}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{8})=\frac{1}{3}$。