大學入學考試中心
104 學年度指定科目考試試題
數學甲

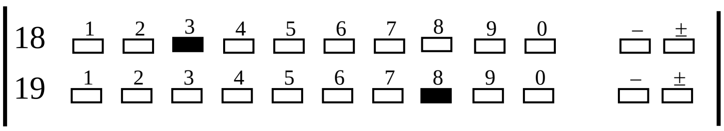
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

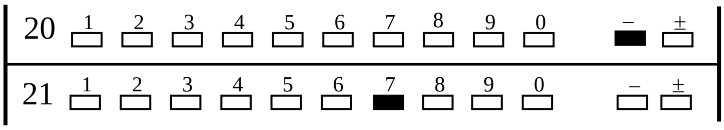
作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 滿足不等式 $\frac{1}{104} \le \left(\sqrt{10}\right)^x \le 2015$ 的整數 x 共有多少個？

   (1) 9 個

   (2) 10 個

   (3) 11 個

   (4) 12 個

   (5) 13 個

2. 考慮坐標平面上的直線 $L: 3x-2y=1$。若 a 為實數且二階方陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -8 \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換可以將 L 上的點變換到一條斜率為 2 的直線，則 a 的值為下列哪一個選項？

   (1) 6

   (2) 8

   (3) 10

   (4) 12

   (5) 14

3. 設複數平面上的相異四點 z_1, z_2, z_3, z_4 依序且依逆時針方向可連成一個正方形。下列哪一個選項為 $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ 之值？

(1) $\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\, i\sin(\frac{\pi}{4})$

(2) $\sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\, i\sin(-\frac{\pi}{4})$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\sin(\frac{\pi}{4})$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(-\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\sin(-\frac{\pi}{4})$

(5) $\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 坐標平面上有 A、B、C 三點，滿足 $\angle ABC$ 為直角，$\overline{AB} = \overline{BC}$，且向量 $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$。請選出可以為向量 $\overrightarrow{AC}$ 的選項。

(1) $(-2, 4)$

(2) $(2, -4)$

(3) $(2, 6)$

(4) $(-2, 6)$

(5) $(6, -2)$

5. 設實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1+i)=5$ 與 $f(i)=10$（其中 $i=\sqrt{-1}$），且 $f(x)$ 除以 $(x^2-2x+2)(x^2+1)$ 的餘式為 $g(x)$。請選出正確的選項。

(1) $g(1+i)=5$

(2) $f(-i)=-10$

(3) $g(x)$ 除以 x^2-2x+2 的餘式是一次多項式

(4) $g(x)$ 除以 x^2-2x+2 的商式是 $2x+1$

(5) $g(x)=2x^3-7x^2+2x+3$

6. 設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，$g(x)$ 為實係數三次多項式。已知 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4$ 與 $x=0$，而 $y=g(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $x=-4, x=0$ 及 $x=4$，且 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的（相對）極小值皆發生於 $-4<x<0$。請選出正確的選項。

(1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最高次項係數皆為正

(2) $f(x)$ 的（相對）極小值發生於 $x=-2$

(3) $g(x)$ 的（相對）極小值發生於 $x=-2$

(4) $g(-1)=g(-3)$

(5) $g(-1)=-g(1)$

7. 坐標平面上有一以原點 O 為圓心的圓 C，交直線 $x-y+1=0$ 於 Q,R 兩點。已知圓 C 上有一點 P 使得 ΔPQR 為一正三角形。請選出正確的選項。

(1) O 點與 P 點皆在 $\overline{QR}$ 的中垂線上

(2) P 點在第三象限

(3) $\overline{QR}$ 的中點坐標為 $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

(4) 圓 C 的方程式為 $x^2+y^2=2$

(5) 直線 $x-y-1=0$ 為圓 C 在 P 點的切線

8. 被診斷為不孕症的患者，可分為兩類：第一類為可藉人工方式受孕；其餘患者為第二類，無法藉由人工方式受孕。第一類在不孕症的患者中所佔比例為 p（$0<p<1$），而每做一次人工受孕成功的機率為 q（$0<q<1$），且每次成功與否互相獨立。不孕症的患者除非人工受孕成功，否則無法得知是屬於哪一類的患者。請選出正確的選項。

(1) 不孕症的患者，第一次人工受孕失敗的機率為 $(1-p)(1-q)$

(2) 在人工受孕失敗一次的情況下，屬於第二類不孕症患者的條件機率為 $\frac{1-p}{1-pq}$

(3) 若醫學進步，讓人工受孕成功的機率 q 提高了，則在人工受孕失敗一次的情況下，屬於第二類不孕症患者的條件機率會降低

(4) 在第一類的患者中，做一次人工受孕就成功的機率大於做兩次才成功的機率

(5) 若醫學進步，讓人工受孕成功的機率 q 提高了，則在第一類的患者中，做一次人工受孕就成功的機率會增加，而做兩次才成功的機率會降低

三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (9–17)。
2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 a,b 為實數，$f(x)$ 為 5 次實係數多項式且其最高次項係數為 a。

若 $f(x)$ 滿足 $\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\left(x^2+4x+5\right)^3-\frac{3}{2}$，則 $a=$ ⑨，$b=$ ⑩⑪。

B. 坐標空間中，設 P,Q 為平面 $3x-2y-2z=1$ 上兩點且滿足 $\overline{PQ}=7$。另取空間中兩點 P',Q' 滿足向量 $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{QQ'}=(-3,4,6)$。當向量 $\overrightarrow{PQ}=\pm($ ⑫ , ⑬ , ⑭⑮ $)$ 時，會使得平行四邊形 $PQQ'P'$ 面積最大。

C. 一盒子裡有 n $(n>3)$ 顆大小相同的球，其中有 1 顆紅球、2 顆藍球以及 $n-3$ 顆白球。從盒子裡隨機同時抽取 3 球，所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為 $2n$ 分、n 分及 1 分。若所得分數的期望值為 E_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n =$ ⑯⑰ 。

— — — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 — — — — — —

第貳部分：非選擇題（占 **24** 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一. 有一時鐘的時針長度為5公分，分針長度為8公分。假設時針針尖每分鐘所移動的弧長都相等。

(1) 試求時針針尖每分鐘所移動的弧長。（3分）

(2) 已知時針針尖與分針針尖距離為7公分，求時針和分針所夾的角度。（4分）

(3) 試問在六點與六點半之間，時針針尖與分針針尖的距離最接近7公分是在六點幾分（取至最接近的整數分鐘）？（4分）

二. 設無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 符合 $a_0=0$ 且當 $n\geq 1$ 時，a_n 滿足

$$a_n - a_{n-1} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n, & \text{當}\, n \text{ 為偶數，} \\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n, & \text{當}\, n \text{ 為奇數。} \end{cases}$$

(1) 將 a_6 寫成兩個等比級數的差，其中一個有6項，另一個有3項。（2分）

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$ 的值。（3分）

(3) 證明：當 $n\geq 0$ 時 $a_{2n+2}-a_{2n}<0$。並依此說明對於所有正整數 n，不等式 $-\dfrac{1}{8}\leq a_{2n}<0$ 恆成立。（8分）