103 學年度指定科目考試數學甲非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科試題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請詳見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

103 學年度指定科目考試數學甲非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)題

$y=x-x^2$ 的圖形交直線 $y=0$ 的 x 坐標為 $x=0,1$；故 Ω 之面積為

$$\int_0^1 (x-x^2)dx=\left.\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

第(2)題

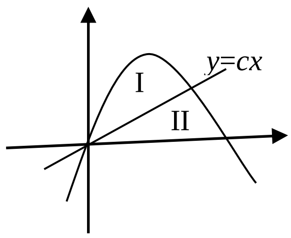
直線 $y=cx$ 交 $y=x-x^2$ 的圖形的 x 坐標為 $x=0,1-c$

以下提供三個解法列出區域的面積

【解法一】利用區域 I 之面積

直線 $y=cx$ 與 $y=x-x^2$ 所圍面積為 $\int_0^{1-c}\left[(x-x^2)-cx\right]dx=\frac{1}{12}$

$$\Rightarrow\left[-\frac{x^3}{3}+(1-c)\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-c}=\frac{1}{12}$$



$$\Rightarrow-\frac{(1-c)^3}{3}+\frac{(1-c)^3}{2}=\frac{1}{12}$$

化簡得 $\frac{(1-c)^3}{6}=\frac{1}{12}$ ，故 $c=1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

【解法二】利用區域 II 之面積

$$\int_0^{1-c} cx\,dx+\int_{1-c}^{1}(x-x^2)dx=\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{1}{2}c(1-c)^2+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{1-c}^{1}=\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}c(1-c)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(1-c)^2+\frac{(1-c)^3}{3}=\frac{1}{12}$$

化簡得 $\frac{(1-c)^3}{6}=\frac{1}{12}$ ，故 $c=1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

【解法三】利用區域 I 之面積＝區域 II 之面積

$$\int_0^{1-c}(x-x^2-cx)dx=\frac{1}{2}c(1-c)^2+\int_{1-c}^{1}(x-x^2)dx$$

$$\Rightarrow\left[-\frac{x^3}{3}+(1-c)\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-c}=\frac{1}{2}c(1-c)^2+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{1-c}^{1}$$

$$\frac{1}{6}(1-c)^3=\frac{1}{2}c(1-c)^2+\frac{1}{6}-\frac{(1-c)^2}{2}+\frac{1}{3}(1-c)^3$$

化簡得 $\frac{(1-c)^3}{6}=\frac{1}{12}$ ，故 $c=1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

第二題

第(1)題

$a_4{}^2+b_4{}^2=\left|(1+i)^4\right|^2=\left|1+i\right|^8=\sqrt{2}^8=16$ 。

第(2)題

【解法一】

由 $a_{n+1}+ib_{n+1}=(1+i)^{n+1}=(1+i)^n(1+i)=(a_n+ib_n)(1+i)=(a_n-b_n)+i(a_n+b_n)$

即 $\begin{cases}a_{n+1}=a_n-b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$ ，推得 $T=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

【解法二】

由題意可推得 $a_1+ib_1=1+i$ ， $a_2+ib_2=(1+i)^2=2i$

設 $T=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

可列出方程組 $\begin{cases} a+b=0 \\ c+d=2 \\ 2b=-2 \\ 2d=2 \end{cases}$ ，解得 $T=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

【解法三】

根據題意可推得 $1+i=\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

推得 $T=\sqrt{2}\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

第(3)題

【解法一】

設 P 、 Q 之坐標（以行向量表示）分別為 (a,b) 、 (c,d)

則 P' 、 Q' 之坐標分別為 $(a-b,a+b)$ 、 $(c-d,c+d)$

得 $\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\dfrac{\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$

同理 $\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}=\dfrac{\sqrt{2(c^2+d^2)}}{\sqrt{(c^2+d^2)}}=\sqrt{2}$ 　　　　故 $\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\sqrt{2}=\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$

以下提供三個方法證明 $\angle POQ=\angle P'OQ'$

【解法 A】

$\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}=(a-b)(c-d)+(a+b)(c+d)=2(ac+bd)=2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

故 $\dfrac{\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}}{\left|\overrightarrow{OP'}\right|\left|\overrightarrow{OQ'}\right|}=\dfrac{2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{\sqrt{2}\left|\overrightarrow{OP}\right|\sqrt{2}\left|\overrightarrow{OQ}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|}$

因此得證 $\cos\angle POQ=\cos\angle P'OQ'$

【解法 B】

$$\cos\angle P'OQ'=\frac{\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}}{\left|\overrightarrow{OP'}\right|\left|\overrightarrow{OQ'}\right|}=\frac{(a-b)(c-d)+(a+b)(c+d)}{\sqrt{2a^2+2b^2}\sqrt{2c^2+2d^2}}$$

$$=\frac{2(ac+bd)}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2}\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$\cos\angle POQ=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|}=\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$$

因此得證 $\cos\angle POQ=\cos\angle P'OQ'$

【解法 C】

$$\left[(a-b)-(c-d)\right]^2+\left[(a+b)-(c+d)\right]^2=2\left[(a-c)^2+(b-d)^2\right]$$

推得 $\left|\overline{P'Q'}\right|^2=2\left|\overline{PQ}\right|^2$

$$\cos\angle POQ=\frac{\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2}{2\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|}$$

$$\cos\angle P'OQ'=\frac{\left|\overrightarrow{OP'}\right|^2+\left|\overrightarrow{OQ'}\right|^2-\left|\overrightarrow{P'Q'}\right|^2}{2\left|\overrightarrow{OP'}\right|\left|\overrightarrow{OQ'}\right|}=\frac{2\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+2\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2-2\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2}{4\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|}$$

故 $\cos\angle POQ=\cos\angle P'OQ'$，而餘弦函數在 0° 與 180° 之間為一對一，

所以 $\cos\angle POQ=\cos\angle P'OQ'$

【解法二】利用線性變換

正確由 $T=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 看出 $T=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}$

所以，T 的作用是將向量旋轉 45° 並放大 $\sqrt{2}$ 倍