102 學年度指定科目考試數學甲非選擇題考生作答情形分析

第一處　朱惠文

每年指考成績單寄發後，總是有些考生認為自己的數學甲非選擇題，答案明明正確，為什麼無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學甲非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此廓清部分考生的疑惑。以下各題會從兩方面進行分析，一是正確的解題步驟，二是考生解題的錯誤概念或解法。

第一題：

一、設 $p(x)$ 為一實係數多項式函數，各項係數及常數項均大於或等於 0。在坐標平面上，已知對所有的 $t \geq 1$，函數 $y = p(x)$ 、 $y = -1 - x^2$ 的圖形與直線 $x = 1$、 $x = t$ 所圍成有界區域的面積為 $t^4 + t^3 + t^2 + t + C$（其中 C 為常數）。

(1) 對所有的 $x \geq 1$，試說明 $p(x) > -1 - x^2$ 對所有的 $x \geq 1$ 均成立。（2 分）

(2) 設 $t \geq 1$，試求 $\int_1^t (-1 - x^2)dx$ 。（3 分）

(3) 試求 C。(2 分)

(4) 試求 $p(x)$。(5 分)

分析：本題評量多項式函數微積分的概念與應用，試題分為 4 小題，逐步引導解題，例如須先證明 $p(x) > -1 - x^2$ 對所有的 $x \geq 1$ 均成立，才能列出 $\int_1^t \left[p(x) + 1 + x^2 \right] \mathrm{d}x = t^4 + t^3 + t^2 + t + C$ 。一般來說，如果對有些 x 是 $p(x) \geq -1 - x^2$ ，但是對某些 x 則是 $p(x) < -1 - x^2$ 時，所圍區域的面積是 $\int_1^t \left| p(x) + 1 + x^2 \right| dx$ 。

第(1)小題

（一） 正確解題步驟：

設 $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ，由題設 $a_i \geq 0$，故當 $x \geq 1$ 時， $p(x) \geq 0$ 成立，而 $-1 - x^2 < 0$ ，故 $p(x) > -1 - x^2$ 必成立。

（二）錯誤概念或解法：

(A1) 反果為因：利用面積 $t^4+t^3+t^2+t+C$ 的值大於零的理由，說明 $p(x)>-1-x^2$。但面積必大於零，因此無法以這理由說明 $p(x)>-1-x^2$，也就是說，$\left|p(x)+1+x^2\right|\geq 0$ 並不能推出 $p(x)>-1-x^2$。或列出 $\int_1^t\left[p(x)+1+x^2\right]\mathrm{d}x=t^4+t^3+t^2+t+C$，因 $t^4+t^3+t^2+t+C>0$，所以 $p(x)>-1-x^2$。

(A2) 理由不完整：例如只寫出 $p(x)$ 為遞增函數，但沒有說明因為各項係數及常數項均大於或等於 0；或證明 $p(x)$ 為遞增函數，但沒有寫出 $p(1)\geq 0$。

(A3) 證明結論不同：最後結論寫成 $p(x)\geq -1-x^2$，非試題所給 $p(x)>-1-x^2$。

第(2)小題

（一）正確解題步驟：

當 $t\geq 1$時，$\int_1^t(-1-x^2)dx=-x-\frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^{x=t}=\frac{4}{3}-t-\frac{t^3}{3}$。

（二）錯誤概念或解法：

(B1) 反導函數錯誤：例如 $\int_1^t -1-x^2dx=-x+\frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^{x=t}$；或 $\int_1^t(-1-x^2)dx=x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^{x=t}$ 等。

(B2) 符號使用錯誤：例如 $\int_1^t(-1-x^2)dx=\int_1^t -x-\frac{x^3}{3}$。

(B3) 完整寫出過程，但計算錯誤：例如 $\int_1^t(-1-x^2)dx=-x-\frac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^{x=t}=\frac{4}{3}-t-\frac{t^2}{3}$。

第(3)小題

（一）正確解題步驟：

由題設及(1)可得 $\int_1^t\left[p(x)+1+x^2\right]\mathrm{d}x=t^4+t^3+t^2+t+C$，令 $t=1$ 得 $0=4+C$；故 $C=-4$。

（二） 錯誤概念或解法：

(C1) 誤以為當 $t=0$ 時，$\int_1^t\left[p(x)+1+x^2\right]\mathrm{d}x$ 的值為 C 的值：例如誤答 $C=\frac{4}{3}$。

第(4)小題

（一） 正確解題步驟：

以下提供兩種解法，第一種解法須先確定 $p(x)$ 為 3 次實係數多項式，再依題意算出反導函數並比較係數。第二種解法是利用微積分基本定理直接微分求得正確答案。

【解法一】

因為 $\int_1^t p(x)dx=\int_1^t(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)\,dx=\frac{a_n}{n+1}t^{n+1}+\cdots+a_0t-(\frac{a_n}{n+1}+\cdots+a_0)$，

由題設及(1)與(2)得知

$\frac{a_n}{n+1}t^{n+1}+\cdots+a_0t-(\frac{a_n}{n+1}+\cdots+a_0)-(\frac{4}{3}-t-\frac{t^3}{3})=t^4+t^3+t^2+t-4$，故 $n=3$；也就是 $\frac{a_3}{4}t^4+\frac{a_2+1}{3}t^3+\frac{a_1}{2}t^2+(a_0+1)t-(\frac{a_3}{4}+\frac{a_2}{3}+\frac{a_1}{2}+a_0+\frac{4}{3})=t^4+t^3+t^2+t-4$。比較係數得 $a_3=4$、$a_2=2$、$a_1=2$、$a_0=0$，所以 $p(x)=4x^3+2x^2+2x$。

【解法二】

將所圍成區域的面積 $\int_1^t\left[p(x)+1+x^2\right]\mathrm{d}x=t^4+t^3+t^2+t+C$ 對變數 t 取微分，由微積分基本定理知 $p(t)+1+t^2=4t^3+3t^2+2t+1$，故 $p(x)=4x^3+2x^2+2x$。

（二） 錯誤概念或解法：

(D1) 直接設 $y=p(x)$ 為三次多項式，未說明理由。

(D2) 反導函數錯誤，導致比較係數錯誤：例如積分後化簡將 t^3 係數誤寫成 $\frac{a_2-1}{3}$。

(D3) 利用微積分基本定理，但微分錯誤：例如 $p(t)+1+t^2=4t^3+3t^2+2t+1+C$。

第二題：

二、設 $A(1,0)$、$B(0,1)$ 為坐標平面上兩點，C 為直線 AB 外一點。經平面線性變換 M 作用後，A 被映射至 $A'(1,\sqrt{2})$、B 被映射至 $B'(-1,\sqrt{2})$，而 C 被映射至 C'。

(1) 試問變換 M 的矩陣為何？(4 分)

(2) 試證變換 M 將 ΔABC 的重心映射至 $\Delta A'B'C'$ 的重心。(4 分)

(3) 若 ΔABC 的面積為 3，試求點 C' 與直線 $A'B'$ 的距離。(4 分)

分析：本題評量矩陣單元中的平面上的線性變換與二階方陣，試題分 3 小題，各小題評量的概念由易而難。

第(1)小題

（一）正確解題步驟：

設 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，由題設得知 $M\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$，因此解得 $\begin{cases} a=1 \\ c=\sqrt{2} \end{cases}$；同理，

$M\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$，因此解得 $\begin{cases} b=-1 \\ d=\sqrt{2} \end{cases}$；故 $M=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$。

一般高中課本採用如上所述的行向量運算。如果採用列向量運算，對應的解法如下：

設 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，由題設得知 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}M=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$，因此解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=\sqrt{2} \end{cases}$；同理，

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}M=\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$，因此解得 $\begin{cases} c=-1 \\ d=\sqrt{2} \end{cases}$；故 $M=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$。

（二）錯誤概念或解法：

(E1) 線性變換的矩陣乘法錯誤：線性變換的矩陣表示法不是為了記錄 $(1,0),(0,1)$ 映射到哪裡，而是要利用線性的性質與矩陣乘法，推得此線性變換將其他的點映射到何處。依照矩陣定義，一個 $m\times k$ 矩陣 A 與 $p\times n$ 矩陣 B 只有在 $k=p$ 時，乘積 AB 才有意義，因此如 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}M=\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ 或 $M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$（這隱含為 $M\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ 及 $M\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$）形式，均不符合矩陣乘法定義。

(E2) 只寫答案，沒有過程：例如只寫出 $M=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$，沒有任何原因或理由。

第(2)小題

（一） 正確解題步驟：

【解法一】

設 C 之坐標為 (a,b)，此處 $a+b\neq 1$，則由 $M=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ 得知 C' 之坐標為 $(a-b,\sqrt{2}a+\sqrt{2}b)$。$\Delta ABC$ 的重心 G 之坐標為三頂點坐標的平均，也就是 $(\frac{1+a}{3},\frac{1+b}{3})$；同理，$\Delta A'B'C'$ 的重心 G' 之坐標為三頂點坐標的平均，也就是 $(\frac{a-b}{3},\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}a+\sqrt{2}b}{3})$。

又由矩陣乘法得 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+a}{3}\\ \frac{1+b}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1+a}{3}-\frac{1+b}{3}\\ \sqrt{2}\cdot\frac{1+a}{3}+\sqrt{2}\cdot\frac{1+b}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{a-b}{3}\\ \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}a+\sqrt{2}b}{3}\end{bmatrix}$，

所以 M 將 ΔABC 的重心 G 映射至 $\Delta A'B'C'$ 的重心 G'。

【解法二】

設 O 為原點，ΔABC 的重心為 G，$\Delta A'B'C'$ 的重心為 G'，因為 M 是個線性變換，所以

$$M(\overrightarrow{OG})=M\left[\ \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\ \right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ M(\overrightarrow{OA})+M(\overrightarrow{OB})+M(\overrightarrow{OC})\ \right]$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}'+\overrightarrow{OB}'+\overrightarrow{OC}')=\overrightarrow{OG}'\text{。}$$

（二） 錯誤概念或解法：

(E1) 矩陣乘法錯誤：例如求 ΔABC 的重心 G 經線性變換後映射的點，進行矩陣乘法時，計算錯誤，如 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+a}{3}\\ \frac{1+b}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{a-b}{3}\\ \frac{2+\sqrt{2}a+\sqrt{2}b}{3}\end{bmatrix}$。

(E2) 論證過程不完整：例如採用解法一，只算出 $\Delta A'B'C'$ 的重心 G'，而未算出 ΔABC 的重心 G 經線性變換後映射的點；或採用解法二，未明白寫出線性變換的過程。

第(3)小題

（一） 正確解題步驟：

【解法一】

設滿足條件的 C 點坐標為 (a,b)，依題意 (a,b) 到直線 AB（由 $A(1,0)$ 及 $B(0,1)$ 坐標知道為 $x+y-1=0$）的距離為 $\dfrac{\Delta ABC\text{面積}\times 2}{\overline{AB}}=\dfrac{3\times 2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，由點到直線的距離公式得知 $\dfrac{|a+b-1|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，也就是 $|a+b-1|=6$。C 經 M 映射後為 $C'(a-b,\sqrt{2}a+\sqrt{2}b)$，故 C' 到直線 $A'B'$（由 $A'(1,\sqrt{2})$ 及 $B'(-1,\sqrt{2})$ 坐標知道為 $y-\sqrt{2}=0$）的距離為 $\dfrac{\left|\sqrt{2}a+\sqrt{2}b-\sqrt{2}\right|}{1}=\sqrt{2}|a+b-1|=6\sqrt{2}$。

【解法二】

因為 ΔABC 的面積為 3，所以 $\Delta A'B'C'$ 的面積為 $|\det M|\cdot 3=6\sqrt{2}$，而 $\overline{A'B'}=2$，所以 C' 與直線 $A'B'$ 的距離為 $\dfrac{\Delta A'B'C'\text{面積}\times 2}{\overline{A'B'}}=\dfrac{6\sqrt{2}\times 2}{2}=6\sqrt{2}$。

（二） 錯誤概念或解法：

(F1) 線性變換觀念錯誤：例如誤以為原 ΔABC 的高，經過線性變換映射後，也是 $\Delta A'B'C'$ 的高。

(F2) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如採解法一得出 $|a+b-1|=6$，推得 $a+b=5$；或採解法二得出 $|\det M|\cdot 3=6$ 等。

數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部分分數與無法得分的可能情形，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考。