102學年度指定科目考試數學甲非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科試題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請詳見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

102 學年度指定科目考試數學甲各大題的參考答案說明如下：

第一題

(1)設 $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，由題設 $a_i\ge 0$，故當 $x\ge 1$時，$p(x)\ge 0$成立，而 $-1-x^2<0$，故 $p(x)>-1-x^2$必成立。

(2)當 $t\ge 1$時，$\int_1^t(-1-x^2)dx=-x-\dfrac{x^3}{3}\Big|_{x=1}^{x=t}=\dfrac{4}{3}-t-\dfrac{t^3}{3}$。

(3)由題設及(1)可知，所圍成有界區域的面積為

$\int_1^t\left[p(x)+1+x^2\right]\mathrm{d}x=t^4+t^3+t^2+t+C$，令 $t=1$得 $0=4+C$，故 $C=-4$。

(4)【解法一】

因為 $\int_1^t p(x)dx=\int_1^t(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)\,dx=\dfrac{a_n}{n+1}t^{n+1}+\cdots+a_0t-(\dfrac{a_n}{n+1}+\cdots+a_0)$，

由題設及(1)與(2)得知

$\dfrac{a_n}{n+1}t^{n+1}+\cdots+a_0t-(\dfrac{a_n}{n+1}+\cdots+a_0)-(\dfrac{4}{3}-t-\dfrac{t^3}{3})=t^4+t^3+t^2+t-4$，故 $n=3$；也就是

$\dfrac{a_3}{4}t^4+\dfrac{a_2+1}{3}t^3+\dfrac{a_1}{2}t^2+(a_0+1)t-(\dfrac{a_3}{4}+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_1}{2}+a_0+\dfrac{4}{3})=t^4+t^3+t^2+t-4$。比較係數得 $a_3=4$、$a_2=2$、$a_1=2$、$a_0=0$，所以 $p(x)=4x^3+2x^2+2x$。

【解法二】

將所圍成區域的面積 $\int_1^t\left[p(x)+1+x^2\right]\mathrm{d}x=t^4+t^3+t^2+t+C$ 對變數 t 取微分，由微積分基本定理知 $p(t)+1+t^2=4t^3+3t^2+2t+1$，故 $p(x)=4x^3+2x^2+2x$。

第二題

(1)設 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，由題設得知 $M\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$，因此解得 $\begin{cases} a=1 \\ c=\sqrt{2} \end{cases}$；同理，

$M\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$，因此解得 $\begin{cases} b=-1 \\ d=\sqrt{2} \end{cases}$；故 $M=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$。

一般高中課本採用如上所述的行向量運算。如果採用列向量運算，對應的解法如下：

設 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，由題設得知 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}M=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$，因此解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=\sqrt{2} \end{cases}$；同理，

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}M=\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$，因此解得 $\begin{cases} c=-1 \\ d=\sqrt{2} \end{cases}$；故 $M=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$。

(2)【解法一】

設 C 之坐標為 (a,b)，此處 $a+b\neq 1$，則由 $M=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ 得知 C' 之坐標為 $(a-b,\sqrt{2}a+\sqrt{2}b)$。$\Delta ABC$ 的重心 G 之坐標為三頂點坐標的平均，也就是 $(\frac{1+a}{3},\frac{1+b}{3})$；同理，$\Delta A'B'C'$ 的重心 G' 之坐標為三頂點坐標的平均，也就是 $(\frac{a-b}{3},\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}a+\sqrt{2}b}{3})$。

又由矩陣乘法得 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1+a}{3} \\ \frac{1+b}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1+a}{3}-\frac{1+b}{3} \\ \sqrt{2}\cdot\frac{1+a}{3}+\sqrt{2}\cdot\frac{1+b}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{a-b}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}a+\sqrt{2}b}{3} \end{bmatrix}$，

所以 M 將 ΔABC 的重心 G 映射至 $\Delta A'B'C'$ 的重心 G'。

【解法二】

設 O 為原點，ΔABC 的重心為 G，$\Delta A'B'C'$ 的重心為 G'，因為 M 是個線性變換，所以

$$M(\overrightarrow{OG})=M\left[\ \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\ \right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ M(\overrightarrow{OA})+M(\overrightarrow{OB})+M(\overrightarrow{OC})\ \right]$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'})=\overrightarrow{OG'}。$$

(3)【解法一】

設滿足條件的 C 點坐標為 (a,b)，依題意 (a,b) 到直線 AB（由 $A(1,0)$ 及 $B(0,1)$ 坐標知道為 $x+y-1=0$）的距離為 $\dfrac{\Delta ABC\text{面積}\times 2}{\overline{AB}}=\dfrac{3\times 2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，由點到直線的距離公式得知 $\dfrac{|a+b-1|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，也就是 $|a+b-1|=6$。C 經 M 映射後為 $C'(a-b,\sqrt{2}a+\sqrt{2}b)$，故 C' 到直線 $A'B'$（由 $A'(1,\sqrt{2})$ 及 $B'(-1,\sqrt{2})$ 坐標知道為 $y-\sqrt{2}=0$）的距離為 $\dfrac{|\sqrt{2}a+\sqrt{2}b-\sqrt{2}|}{1}=\sqrt{2}|a+b-1|=6\sqrt{2}$。

【解法二】

因為 ΔABC 的面積為 3，所以 $\Delta A'B'C'$ 的面積為 $|\det M|\cdot 3=6\sqrt{2}$，而 $\overline{A'B'}=2$，所以 C' 與直線 $A'B'$ 的距離為 $\dfrac{\Delta A'B'C'\text{面積}\times 2}{\overline{A'B'}}=\dfrac{6\sqrt{2}\times 2}{2}=6\sqrt{2}$。