101學年度指定科目考試數學甲非選擇題考生作答情形分析

第一處　朱惠文

每年指考成績單寄發後，有些考生認為自己的數學甲非選擇題，最後答案明明正確，為什麼無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學甲非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此廓清部分考生的疑惑。以下各題會從兩方面進行分析，一是正確的解題步驟，二是考生解題的錯誤概念或解法，至於各題的參考解答可詳見附件。

第一題：

題目：設 f 為一實係數多項式函數。

(1) 設 $\langle a_n \rangle$ 為一數列，其中 $a_n = \frac{f(n)}{n^4}$。若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$，試求 f 的次數與最高次項係數。(3 分)

(2) 若 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 3$，試求 f 的函數圖形在 $x=0$ 時的切線方程式。(4 分)

(3) 若 f 滿足上面(1)與(2)的假設，且 $f''(0)=2$，試求 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ 之值。(5 分)

分析：

第(1)小題

(一) 正確解題步驟：

本題評量多項式函數微積分的概念與應用，試題分為 3 小題。第(1)小題的正確解題步驟為根據題意 $a_n = \frac{f(n)}{n^4}$ 及 $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$，先推得 f 的次數為 4，再加上 $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ 的條件，求出最高次項係數為 5 (詳細解法請詳見附件)。

(二) 錯誤概念或解法：

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(A1) 極限觀念錯誤，而誤答 f 的次數。

(A2) 誤認首項係數為 f 的次數，或誤認首項係數恆為 1。

第(2)小題

（一） 正確解題步驟：

本小題的解題步驟可分為兩個（詳細解法請詳見附件）:

(1) 根據題意 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$，推得 $f(0)=0$、$f'(0)=3$。

(2) 正確寫出 f 的函數圖形在 $x=0$ 的切線方程式為 $y=3x$

（二） 錯誤概念或解法：

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(B1) 極限觀念錯誤：例如由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$，先寫出 $f'(0)=3$，再推得 $f(0)=0$。

或由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$，直接寫出切線方程式為 $y=3x$，並未說明 $f(0)=0$。

或直接列出 $f(x)=5x^4+bx^3+cx^2+dx$，未說明常數項為 0 的理由。

(B2) 不清楚極限與 $f'(x)$、$f(x)$ 的關係：例如由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$ 推得 $f'(0)=3$、$f(0)=3$。故切線方程式為 $y=3x+3$。

(B3) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如令 $f(x)=c_m x^m+\cdots+c_1x+c_0$，但 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{c_m x^m+\cdots+c_1x+c_0}{x}=\lim_{x\to 0}(c_m x^{m-1}+\cdots+c_1)$。

第(3)小題

（一） 正確解題步驟：

本小題的解題步驟可分為 3 個（詳細解法請詳見附件）:

(1) 根據題意，推得 $f(x)=5x^4+bx^3+x^2+3x$。

(2) 列式求解 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(5x^4+bx^3+x^2+3x)dx$

(3) 得出 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{8}{3}$ 或 $2\frac{2}{3}$

（二） 錯誤概念或解法：

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(C1) 導數觀念錯誤：例如由 $f''(0)=2$，列式得 $f(x)=5x^4+bx^3+2x^2+3x$。

(C2) 反導函數寫錯或未說明理由：例如

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(5x^4+bx^3+x^2+3x)dx=x^5+\frac{b}{4}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}$；或誤以為函數圖形對稱於 $x=0$，而列出 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_{0}^{1} f(x)dx$；或直接列出 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(5x^4+x^2)dx$，但未說明奇數次項在區間 $[-1,1]$ 的積分為 0。

(C3) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如誤以為 $(1+\frac{1}{3})-(-1-\frac{1}{3})=2$，或誤寫 $f(x)=5x^4+ax^3+x^2$。

本題出自高三選修數學(II)的範圍，而且各版本均提及解題概念，例如極限概念、一階與二階導函數的概念、多項式函數的積分等。對考生而言，應不難下筆作答。不過數學科非選擇題主要評量用數學式清楚表達解題過程的能力，因此列式、推理過程是否正確、邏輯判斷是否合理，均為評定分數的重要依據，並非僅看答案而已。

第二題：

題目：在 ΔABC 中，D 為 $\overline{BC}$ 邊上一點且 $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$。已知 $\overline{BD}=5$、$\overline{DC}=7$，且 $\angle ABC=60°$。

(1) 試求 $\sin\angle ACB$ 之值。（4 分）

(2) 試求 $\sin\angle BAC$ 之值。（4 分）

(3) 試求 $\overline{AB}$ 邊之長。（4 分）

分析：

第(1)小題

（一） 正確解題步驟：

本題評量三角函數單元，試題分三小題，第(1)小題的正確解題步驟可分為以下 2 個（詳細解法請詳見附件）:

(1) 列出求解 $\sin\angle ACB$ 的相關數學式，例如正弦、餘弦、或畢式定理等。

(2) 求得 $\sin\angle ACB$ 的值。

（二） 錯誤概念或解法：

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(D1) 列式或推論錯誤：例如列出 $\dfrac{\sin(2\angle BAD)}{\overline{BC}}=\dfrac{\sin\angle ACB}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin 60^\circ}{\overline{AC}}$，直接推得 $\angle BAD=15^\circ$，或直接令 $\angle BAC=90^\circ$。

(D2) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如利用餘式定理得到 $2t^2+5t-12=0$，因式分解錯誤，得到 $(2t+3)(t-4)=0$，或誤認 $\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ 等。

第(2)小題

（一） 正確解題步驟：

本小題正確解題步驟可分為以下 2 個（詳細解法請詳見附件）:

(1) 列出求解 $\sin\angle BAC$ 的相關數學式，例如平方和、和角公式或正弦定理等。

(2) 求得 $\sin\angle BAC$ 的值。

（二） 錯誤概念或解法：

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(E1) 列式錯誤：例如記錯和角公式，得

$\sin(120^\circ-\angle ACB)=\sin120^\circ\cos\angle ACB+\cos120^\circ\sin\angle ACB$。

(E2) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如誤以為 $\cos120^\circ=\dfrac{1}{2}$；或

$$\frac{\sin\angle BAC}{12}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{21}{2}}$$，得 $\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{3}}{14}$ 等。

第(3)小題

（一） 正確解題步驟：

本小題正確解題步驟可分為以下 2 個（詳細解法請詳見附件）：

(1) 列出求解 $\overline{AB}$ 的相關數學式，例如正弦、餘弦、或畢式定理等。

(2) 求得 $\overline{AB}$ 的值。

（二） 錯誤概念或解法：

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(F1) 列式錯誤或因式分解錯誤：例如利用餘弦定理，但化簡錯誤，如 $4t^2-10t-24=0$。

(F2) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如利用餘弦定理得

$$\cos 60^\circ=\frac{144+(5r)^2-(7r)^2}{2\cdot 14\cdot(5r)}$$。

以上這幾種情形，有的記錯公式，例如和角公式等，有些列式正確，但計算錯誤，而沒有得到滿分，甚至零分。

數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數[1]。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部分分數與無法得分的可能情形，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考。

[1] 吳家怡(民 93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第 120 期。

附件

數學科試題的解法不只一種，故以下提供多數考生可能採用的解法，未列的解法，只要推論或解題過程正確，仍可得分。

第一題

第(1)題

設 f 為 m 次多項式

當 $m>4$ 時，$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^4}$ 不存在；而當 $m<4$ 時，$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^4}=0$

再由題意 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^4}=5$ 知 f 為 4 次多項式

令 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

因 $5=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^4}=\lim_{n\to\infty}(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{d}{n^3}+\frac{e}{n^4})=a$

所以 f 的最高次項係數為 5

第(2)題：以下提供兩種常見的解法

【解法一】

由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$ 知

$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=3\cdot 0=0$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

故 f 的函數圖形在 $x=0$ 的切線方程式為 $y=3x$

【解法二】

令 $f(x)=c_mx^m+\cdots+c_1x+c_0$(其中 $c_m\neq 0$) 為 m 次多項式，因

$3=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{c_mx^m+\cdots+c_1x+c_0}{x}=\lim_{x\to 0}(c_mx^{m-1}+\cdots+c_1+\frac{c_0}{x})$

知 $c_0=0$，$c_1=3$，即 $f(0)=0$，$f'(0)=3$

故 f 的函數圖形在 $x=0$ 的切線方程式為 $y=3x$

第(3)題

由（1）、（2）知 $f(x)=5x^4+bx^3+cx^2+3x$，再由 $f''(0)=2$ 知 $c=1$。

故 $f(x)=5x^4+bx^3+x^2+3x$

以下提供兩種常見的解法解出 $\int_{-1}^{1}f(x)dx$ 的值。

【解法一】

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)dx&=\int_{-1}^{1}(5x^4+bx^3+x^2+3x)dx\\&=x^5+\frac{b}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}\\&=(1+\frac{b}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{2})-(-1+\frac{b}{4}-\frac{1}{3}+\frac{3}{2})\\&=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}\end{aligned}$$

【解法二】

因奇數次項在區間 $[-1,1]$ 的積分為 0，所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)dx&=\int_{-1}^{1}(5x^4+x^2)dx\\&=x^5+\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}\\&=(1+\frac{1}{3})-(-1-\frac{1}{3})\\&=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}\end{aligned}$$

第二題：**以下提供兩種常見的解法**

【解法一】

第(1)題

由正弦定理得

方程組 $\begin{cases} \dfrac{5}{\sin\frac{1}{2}\angle BAC} = \dfrac{\overline{AD}}{\sin 60^\circ} \\ \dfrac{7}{\sin\frac{1}{2}\angle BAC} = \dfrac{\overline{AD}}{\sin \angle ACB} \end{cases}$

再將兩式相除得 $\dfrac{5}{7} = \dfrac{\sin\angle ACB}{\sin 60^\circ}$

故 $\sin\angle ACB = \dfrac{5}{7}\cdot\sin 60^\circ = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

第(2)題

由(1)知 $\cos\angle ACB = \sqrt{1-\sin^2\angle ACB} = \sqrt{1-(\frac{5\sqrt{3}}{14})^2} = \sqrt{1-\frac{75}{14^2}} = \sqrt{\frac{121}{14^2}} = \frac{11}{14}$

以下提供兩種常見的解法求出 $\sin\angle BAC$ 的值。

【解法一】由和角公式得

$$\begin{aligned}
\sin\angle BAC &= \sin(180^\circ - \angle ABC - \angle ACB) \\
&= \sin(180^\circ - 60^\circ - \angle ACB) \\
&= \sin(120^\circ - \angle ACB) \\
&= \sin 120^\circ \cos\angle ACB - \cos 120^\circ \sin\angle ACB \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle ACB + \frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle ACB + \frac{5\sqrt{3}}{28} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{11}{14} + \frac{5\sqrt{3}}{28} = \frac{4\sqrt{3}}{7}
\end{aligned}$$

【解法二】由和角公式得

$$\begin{aligned}
\sin\angle BAC &= \sin(180^\circ - \angle ABC - \angle ACB) \\
&= \sin(60^\circ + \angle ACB) \\
&= \sin 60^\circ \cos\angle ACB + \cos 60^\circ \sin\angle ACB
\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle ACB+\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle ACB+\frac{5\sqrt{3}}{28}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{11}{14}+\frac{5\sqrt{3}}{28}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

故 $\sin\angle BAC=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

第(3)題

由正弦定理、(1)與(2)得

$$\frac{\overline{AB}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}=\frac{12}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

所以 $\overline{AB}=\frac{12}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{15}{2}$

【解法二】

第(1)題

由內分比與餘弦定理得

方程組 $\begin{cases} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{5}{7} \\ \overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos 60° \end{cases}$

令 $\overline{AB}=5t$ ，$\overline{AC}=7t$ ($t>0$)

得方程式 $49t^2=25t^2+144-60t$ 或 $2t^2+5t-12=0$ ，解得 $t=\dfrac{3}{2}$

故 $\overline{AB}=\dfrac{15}{2}$ ，$\overline{AC}=\dfrac{21}{2}$ 。

以下提供兩種常見的解法求出 $\sin\angle ACB$ 的值。

【解法一】由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle ACB}{\frac{15}{2}}=\frac{\sin 60°}{\frac{21}{2}}$$

故 $\sin\angle ACB=\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

【解法二】由餘弦定理得

$$\cos\angle ACB=\frac{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}{2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}}$$

$$=\frac{12^2+\left(\frac{21}{2}\right)^2-\left(\frac{15}{2}\right)^2}{2\cdot 12\cdot\frac{21}{2}}=\frac{11}{14}$$

故

$$\sin\angle ACB=\sqrt{1-\cos^2\angle ACB}=\sqrt{1-(\frac{11}{14})^2}=\sqrt{1-\frac{121}{14^2}}=\sqrt{\frac{75}{14^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

第(2)題：以下提供兩種常見的解法求出 $\sin\angle BAC$ 的值。

【解法一】由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle BAC}{12}=\frac{\sin 60^\circ}{\frac{21}{2}}$$

$$\text{故 } \sin\angle BAC=\frac{12}{\frac{21}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

【解法二】由餘弦定理得

$$\cos\angle BAC=\frac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}{2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AB}}$$

$$=\frac{\left(\frac{21}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2-12^2}{2\cdot\frac{21}{2}\cdot\frac{15}{2}}=\frac{1}{7}$$

故

$$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\sqrt{1-(\frac{1}{7})^2}=\sqrt{1-\frac{1}{7^2}}=\sqrt{\frac{48}{7^2}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

第(3)題

由(1)可得 $\overline{AB}=5t=\frac{15}{2}$