

101 學年度指定科目考試數學甲非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科試題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請詳見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

101 學年度指定科目考試數學甲各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)題

設 f 為 m 次多項式

當 $m > 4$ 時， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^4}$ 不存在；而當 $m < 4$ 時， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^4} = 0$

再由題意 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^4} = 5$ 知 f 為 4 次多項式

令 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

因 $5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \frac{e}{n^4} \right) = a$

所以 f 的最高次項係數為 5

第(2)題：以下提供兩種常見的解法

【解法一】

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ 知

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 3 \cdot 0 = 0$

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

故 f 的函數圖形在 $x=0$ 的切線方程式為 $y = 3x$

【解法二】

令 $f(x) = c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0$ (其中 $c_m \neq 0$) 為 m 次多項式，因

$3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (c_m x^{m-1} + \cdots + c_1 + \frac{c_0}{x})$

知 $c_0 = 0$ ， $c_1 = 3$ ，即 $f(0) = 0$ ， $f'(0) = 3$

故 f 的函數圖形在 $x=0$ 的切線方程式為 $y = 3x$

第(3)題

由(1)、(2)知 $f(x) = 5x^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$ ，再由 $f''(0) = 2$ 知 $c = 1$ 。

故 $f(x) = 5x^4 + bx^3 + x^2 + 3x$

以下提供兩種常見的解法解出 $\int_{-1}^1 f(x)dx$ 的值。

【解法一】

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^1 (5x^4 + bx^3 + x^2 + 3x)dx \\ &= x^5 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_{-1}^1 \\ &= \left(1 + \frac{b}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(-1 + \frac{b}{4} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}\end{aligned}$$

【解法二】

因奇數次項在區間 $[-1,1]$ 的積分為 0，所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^1 (5x^4 + x^2)dx \\ &= x^5 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^1 \\ &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}\end{aligned}$$

第二題：以下提供兩種常見的解法

【解法一】

第(1)題

由正弦定理得

$$\text{方程組} \begin{cases} \frac{5}{\sin \frac{1}{2} \angle BAC} = \frac{\overline{AD}}{\sin 60^\circ} \\ \frac{7}{\sin \frac{1}{2} \angle BAC} = \frac{\overline{AD}}{\sin \angle ACB} \end{cases}$$

再將兩式相除得 $\frac{5}{7} = \frac{\sin \angle ACB}{\sin 60^\circ}$

故 $\sin \angle ACB = \frac{5}{7} \cdot \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{14}$

第(2)題

$$\text{由(1)知 } \cos \angle ACB = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ACB} = \sqrt{1 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{75}{14^2}} = \sqrt{\frac{121}{14^2}} = \frac{11}{14}$$

以下提供兩種常見的解法求出 $\sin \angle BAC$ 的值。

【解法一】 由和角公式得

$$\begin{aligned} \sin \angle BAC &= \sin(180^\circ - \angle ABC - \angle ACB) \\ &= \sin(180^\circ - 60^\circ - \angle ACB) \\ &= \sin(120^\circ - \angle ACB) \\ &= \sin 120^\circ \cos \angle ACB - \cos 120^\circ \sin \angle ACB \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle ACB + \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle ACB + \frac{5\sqrt{3}}{28} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{11}{14} + \frac{5\sqrt{3}}{28} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$

【解法二】 由和角公式得

$$\begin{aligned} \sin \angle BAC &= \sin(180^\circ - \angle ABC - \angle ACB) \\ &= \sin(60^\circ + \angle ACB) \\ &= \sin 60^\circ \cos \angle ACB + \cos 60^\circ \sin \angle ACB \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle ACB + \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle ACB + \frac{5\sqrt{3}}{28} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{11}{14} + \frac{5\sqrt{3}}{28} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \sin \angle BAC = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

第(3)題

由正弦定理、(1)與(2)得

$$\frac{\overline{AB}}{5\sqrt{3}} = \frac{12}{4\sqrt{3}}$$

$$\text{所以 } \overline{AB} = \frac{12}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{15}{7}$$

【解法二】

第(1)題

由內分比與餘弦定理得

$$\text{方程組} \begin{cases} \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{5}{7} \\ \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos 60^\circ \end{cases}$$

$$\text{令 } \overline{AB} = 5t, \overline{AC} = 7t (t > 0)$$

$$\text{得方程式 } 49t^2 = 25t^2 + 144 - 60t \text{ 或 } 2t^2 + 5t - 12 = 0, \text{ 解得 } t = \frac{3}{2}$$

$$\text{故 } \overline{AB} = \frac{15}{2}, \overline{AC} = \frac{21}{2}.$$

以下提供兩種常見的解法求出 $\sin \angle ACB$ 的值。

【解法一】由正弦定理得

$$\frac{\sin \angle ACB}{\frac{15}{2}} = \frac{\sin 60^\circ}{\frac{21}{2}}$$

$$\text{故 } \sin \angle ACB = \frac{5}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

【解法二】由餘弦定理得

$$\begin{aligned} \cos \angle ACB &= \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}} \\ &= \frac{12^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2}{2 \cdot 12 \cdot \frac{21}{2}} = \frac{11}{14} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \sin \angle ACB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ACB} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{121}{14^2}} = \sqrt{\frac{75}{14^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

第(2)題：以下提供兩種常見的解法求出 $\sin \angle BAC$ 的值。

【解法一】由正弦定理得

$$\frac{\sin \angle BAC}{12} = \frac{\sin 60^\circ}{\frac{21}{2}}$$

$$\text{故 } \sin \angle BAC = \frac{12}{\frac{21}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

【解法二】由餘弦定理得

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB}} \\ &= \frac{\left(\frac{21}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 - 12^2}{2 \cdot \frac{21}{2} \cdot \frac{15}{2}} = \frac{1}{7}\end{aligned}$$

$$\text{故 } \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{7^2}} = \sqrt{\frac{48}{7^2}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

第(3)題

$$\text{由(1)可得 } \overline{AB} = 5t = \frac{15}{2}$$