

100 學年度指定科目考試數學乙非選擇題考生作答情形分析

第一處 陳慧美

每年指考成績單寄發後，總有些考生認為自己的數學乙非選擇題，答案明明正確，為何無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學甲非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此廓清部分考生的疑惑。以下各題將從兩方面進行分析，(一) 是正確的解題步驟，(二) 是考生解題的錯誤概念或解法。至於各題的參考解法可詳見二、參考解法示例。

一、正確解題步驟及錯誤解法說明

第一題

試題：設 a, b 為實數。已知坐標平面上滿足聯立不等式

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x + y \leq 6 \\ 2x - y \geq 0 \\ y \geq ax - b \end{cases}$$

的區域是一個菱形。

(1) 試求此菱形之邊長。(4 分)

(2) 試求 a, b 。(8 分)

分析：

第(1)小題

(一) 正確解題步驟

本題評量條件不等式，試題分為兩小題，因題幹上的聯立不等式的區域是一個菱形，故第(1)小題評量該菱形的邊長；第(2)小題欲求菱形另一邊的直線方程式。

第(1)小題的可能解法有兩種(可參考二、參考解法示例)：一是找出相鄰兩交點，如： O 與 A 點，或 B 與 C 點，再將這兩點代入距離公式求解菱形邊長。二為先算出 $(0,0)$ 至 $x+y=6$ 的距離，再由 $x+y=6$ 與 $2x-y=0$ 之夾角 θ 求出 $\cos\theta$ (或 $\sin\theta$ 、 $\tan\theta$)後，求得 \overline{OA} 之值。

(二) 錯誤概念或解法

以下依據上述的解題，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(A1)將邊長誤算成菱形的周長。

(A2)不曉得菱形的四邊相等，經過計算後，常得到不等長的邊長。

(A3)將邊長算成平行線的距離。

(A4)並非利用 O 與 A 點，或 B 與 C 點，而是利用 O 、 C 兩點求解距離，以致無法求解。

第(2)小題

(一) 正確解題步驟

a 值解法，因菱形的兩對邊分別平行，又直線 $x+y=0$ 與 $x+y=6$ 平行，故直線 $y=ax-b$ 必與 $y=2x$ 平行，得 $a=2$ 。

b 值解法有四，解一與解二是利用兩直線 $\begin{cases} y=2x-b \\ x+y=0 \end{cases}$ 的交點 $C(\frac{b}{3}, -\frac{b}{3})$ 或 $C(t, -t)$ 與 O 點的距離為 $2\sqrt{5}$ 求解。解三是由 $(0,0)$ 至 $x+y=6$ 與到 $y=2x-b$ 的距離相等來求解。解四是由菱形對角線相互垂直，可利用斜率或內積相乘得解。

(二) 錯誤概念或解法

以下依據上述的解題，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(B1)不曉得利用兩對邊平行求出 $a=2$ 。

(B2)因利用 $\begin{cases} y=ax-b \\ x+y=0 \end{cases}$ 的交點 $(\frac{b}{a+1}, \frac{-b}{a+1})$ ，與 $\begin{cases} y=ax-b \\ x+y=6 \end{cases}$ 的交點 $(\frac{b+6}{a+1}, \frac{6a-b}{a+1})$ 之距離為

$\sqrt{20}$ ，多求出 $a=\frac{1}{2}$ 的解。此外，有考生僅求得 $a=2$ 後，就不知該如何求 b 值。

(B3)因利用 $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ 的交點 $(0,0)$ ，與 $\begin{cases} 2x-y=b \\ x+y=0 \end{cases}$ 的交點 $(\frac{b}{3}, \frac{-b}{3})$ 之距離為 $\sqrt{20}$ ，得到

$b=\pm 3\sqrt{10}$ 。有些考生未能排除負不合，如：考生誤將菱形區域畫在直線 $2x-y=0$ 的左上方，而得到 b 值為負值。

(B4)無任何算式或理由，直接寫 $b=3\sqrt{10}$ ，依作答說明規定「必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分」，故無法得分。

本題出自高三選修數學(I)的範圍，考生若能將不等式圖形繪出，此題所運用的解題概念與運算並不複雜，應不難正確作答。不過數學科非選擇題主要評量用數學式清楚表達解題過程的能力，因此列式、推理過程是否正確、邏輯判斷是否合理，均為評定分數的重要依據。

第二題

試題：設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 為二階實係數方陣。

- (1) 當 A 為轉移矩陣時，試敘述實數 a 、 b 、 c 、 d 須滿足的條件。(6分)
- (2) 試證：當 A 為轉移矩陣時， A^2 也是轉移矩陣（式中 A^2 代表 A 與 A 的乘積）。(6分)

分析：

第(1)小題

(一) 正確解題步驟

本題評量矩陣單元，試題分為二小題，第(1)小題是評量轉移矩陣的定義；第(2)小題是證明當 A 為轉移矩陣時， A^2 也是轉移矩陣。在第(1)小題中，轉移矩陣的定義為 $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ 、 $a+c=1$ 、 $b+d=1$ ，其中若有寫出 $a+c=1$ 與 $b+d=1$ ，則 a, b, c, d 的條件可寫成 $a, b, c, d \geq 0$ 或 $a, b, c, d \leq 1$ 即可。此外，所有條件中行列互換，寫成 $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ 、 $a+b=1$ 、 $c+d=1$ 亦可(參閱二、參考解法示例)。

(二) 錯誤概念或解法

以下依據上述的解題，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

- (C1) 無法列出完整條件，僅能寫出 1~2 個正確條件，常出現的錯為少列等號，寫成 $0 < a, b, c, d < 1$ 。
- (C2) 無法完整寫出任一條件，如寫成 $a, b, c, d \in R$ ，或 $ad - bc \neq 0$ 等，因此無法得分。
- (C3) 寫出 1~2 個正確條件後，又多寫了與轉移矩陣無關的條件，如 $a, b, c, d \in R$ ，或 $ad - bc \neq 0$ 等，將酌予扣分。

第(2)小題

(一) 正確解題步驟

此題的解法為將 A^2 乘開後，得 $\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$ ，並說明因 A 的各元都是非負實數，故 A^2 的各元也都是非負實數。再經由計算說明第一行的和為 1，第二行的

和為 1，故 A^2 也是轉移矩陣。亦可將 A 中的 c 以 $1-a$ 代入， d 以 $1-b$ 代入，得 $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 + b(1-a) & ab + b(1-b) \\ a(1-a) + (1-a)(1-b) & b(1-a) + (1-b)^2 \end{bmatrix}$ ，再說明 A^2 為轉移矩陣的理由。

(二) 錯誤概念或解法

以下依據上述的解題，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(D1) 考生在進行 A^2 矩陣運算時，常會發生矩陣中的某元乘錯，以致於無法得到該運算的分數。

(D2) 部分考生會將 a, b, c, d 以數字代入證明之，與原題目不符，因此無法得分。

(D3) 說明第一行的和為 1 或第二行的和為 1 時，並無任何計算過程，酌予扣分。

(D4) 僅會進行 A^2 矩陣運算，無法完整說明 A^2 為轉移矩陣的原因。

除上述情形外，發現有部分考生直接放棄第二題的證明題，連 A^2 的矩陣運算都不願下筆計算，以致 1 分未得。若將矩陣運算寫成行列式運算，亦 1 分未得。

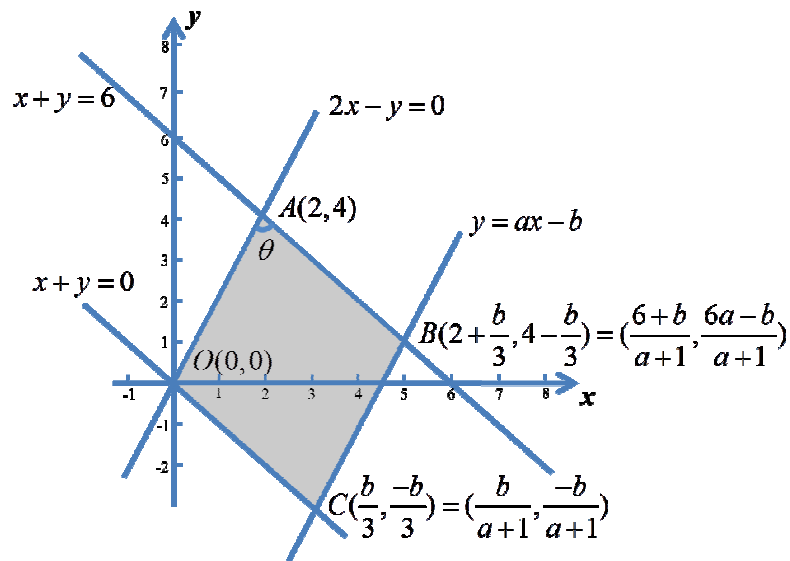
數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數¹。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部份分數與無法得分的可能情形，以提供老師教學或學生平常練習時的參考。

二、參考解法示例

數學科試題的解法不只一種，故以下提供多數考生可能採用的解法，未列的解法，只要推論或解題過程正確，仍可得分。

¹ 吳家怡(民 93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第 120 期。

第一題



第(1)小題

解法一

兩直線 $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ 的交點為 $O(0,0)$ ，兩直線 $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=6 \end{cases}$ 的交點為 $A(2,4)$

故菱形邊長為 $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 4^2}$ (或 $= \sqrt{20}$) (或 $= 2\sqrt{5}$) (或 $\overline{BC} = \sqrt{(2+\frac{b}{3}-\frac{b}{3})^2 + (4-\frac{b}{3}+\frac{b}{3})^2} = 2\sqrt{5}$)

解法二

$(0,0)$ 到 $x+y=6$ 之距離 $= 3\sqrt{2}$

$x+y=6$ 與 $2x-y=0$ 之夾角 θ 滿足 $\cos\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$ (或 $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$) (或 $\tan\theta = \pm 3$)，則

$$\overline{OA} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \sqrt{20} \text{ (或 } = 2\sqrt{5}\text{)}$$

第(2)小題

直線 $x+y=0$ 與 $x+y=6$ 平行

故直線 $y=ax-b$ 必與 $y=2x$ 平行；

得知 $a=2$

解法一

兩直線 $\begin{cases} y = 2x - b \\ x + y = 0 \end{cases}$ 的交點 $C(\frac{b}{3}, -\frac{b}{3})$,

$$\overline{OC} = \sqrt{(\frac{b}{3})^2 + (-\frac{b}{3})^2} = 2\sqrt{5} \text{ , 得到 } b^2 = 90$$

又直線 $y = 2x - b$ 的 y 截距 $-b < 0$ (或 x 截距 $\frac{b}{2} > 0$) , 即 $b > 0$,

故 $b = \sqrt{90}$ (或 $= 3\sqrt{10}$)

※註：也可用 $\begin{cases} y = 2x - b \\ x + y = 6 \end{cases}$ 的交點 $B(2 + \frac{b}{3}, 4 - \frac{b}{3})$, $\overline{AB} = \sqrt{(\frac{b}{3})^2 + (-\frac{b}{3})^2} = 2\sqrt{5}$ 。

解法二

兩直線 $\begin{cases} x + y = 0 \\ y = ax - b \end{cases}$ 的交點 $C(t, -t)$, $t > 0$, $(0, 0)$ 到 $(t, -t)$ 的距離為 $\sqrt{t^2 + (-t)^2} = 2\sqrt{5}$ (或 $t = \sqrt{10}$)

將 $(\sqrt{10}, -\sqrt{10})$ 代入 $y = 2x - b$, 得 $b = 3\sqrt{10}$

※註：也可用 $\begin{cases} x + y = 6 \\ y = ax - b \end{cases}$ 的交點 $B(t, 6 - t)$, 得到 $B(2 + \sqrt{10}, 4 - \sqrt{10})$, 再代入 $y = 2x - b$, 得 $b = 3\sqrt{10}$ 。

解法三

$(0, 0)$ 到 $x + y = 6$ 的距離為 $\frac{6}{\sqrt{2}}$, $(0, 0)$ 到 $y = 2x - b$ 的距離為 $\frac{|b|}{\sqrt{5}}$ (或 $\frac{b}{\sqrt{5}}$)

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{|b|}{\sqrt{5}} \text{ (或 } \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{5}} \text{)} , \text{ 又 } b > 0 , \text{ 得 } b = 3\sqrt{10}$$

解法四

由 $\overline{OB} \perp \overline{AC}$, 得 $\frac{12-b}{6+b} \cdot \frac{4+\frac{b}{3}}{2-\frac{b}{3}} = -1$ (或內積 $(2-\frac{b}{3})(2+\frac{b}{3}) + (4+\frac{b}{3})(4-\frac{b}{3}) = 0$)

即 $144 - b^2 = -(36 - b^2)$, 得到 $b^2 = 90$

又 $b > 0$, 得知 $b = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

第二題

以行來看

第(1)小題

$$\begin{cases} 0 \leq a, b, c, d \leq 1 \\ a + c = 1 \\ b + d = 1 \end{cases}$$

※註：已寫出 $a+c=1$ 及 $b+d=1$ 者，僅需寫出 $a, b, c, d \geq 0$ (或 $a, b, c, d \leq 1$)，即可得分。

第(2)小題

解法一：

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

因為 A 的各元都是非負實數，所以 A^2 的各元也都是非負實數

$$\text{第一行：}(a^2 + bc) + (ac + cd) = (a^2 + ac) + (bc + cd) = a(a + c) + c(b + d) = a + c = 1$$

$$\text{第二行：}(ab + bd) + (bc + d^2) = (ab + bc) + (bd + d^2) = b(a + c) + d(b + d) = b + d = 1$$

故 A^2 也是轉移矩陣

解法二：

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b(1-a) & ab + b(1-b) \\ a(1-a) + (1-a)(1-b) & b(1-a) + (1-b)^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{或} = \begin{bmatrix} a^2 + b - ab & ab + b - b^2 \\ 1 - a^2 - b + ab & 1 - ab - b + b^2 \end{bmatrix}$$

因為 A 的各元都是非負實數，所以 A^2 的各元也都是非負實數

$$\text{第一行：}(a^2 + b - ab) + (1 - a^2 - b + ab) = 1$$

$$\text{第二行：}(ab + b - b^2) + (1 - ab - b + b^2) = 1$$

故 A^2 也是轉移矩陣。

以列來看

第(1)小題

$$\begin{cases} 0 \leq a, b, c, d \leq 1 \\ a + b = 1 \\ c + d = 1 \end{cases}$$

※註：已寫出 $a+b=1$ 及 $c+d=1$ 者，僅需寫出 $a, b, c, d \geq 0$ (或 $a, b, c, d \leq 1$)，即可得分。

第(2)小題

解法一：

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

因為 A 的各元都是非負實數，所以 A^2 的各元也都是非負實數

第一列： $(a^2 + bc) + (ab + bd) = (a^2 + ab) + (bc + bd) = a(a + b) + b(c + d) = a + b = 1$

第二列： $(ac + cd) + (bc + d^2) = (ac + bc) + (cd + d^2) = c(a + b) + d(c + d) = c + d = 1$

故 A^2 也是轉移矩陣

解法二：

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ c & 1-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1-a \\ c & 1-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c(1-a) & a(1-a) + (1-a)(1-c) \\ ac + c(1-c) & c(1-a) + (1-c)^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{或} = \begin{bmatrix} a^2 + c - ac & 1 - a^2 - c + ac \\ ac + c - c^2 & 1 - ac - c + c^2 \end{bmatrix}$$

因為 A 的各元都是非負實數，所以 A^2 的各元也都是非負實數

第一列： $(a^2 + c - ac) + (1 - a^2 - c + ac) = 1$

第二列： $(ac + c - c^2) + (1 - ac - c + c^2) = 1$

故 A^2 也是轉移矩陣。